Amérique du Sud novembre 2004

Exercice 2 (3 points)

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

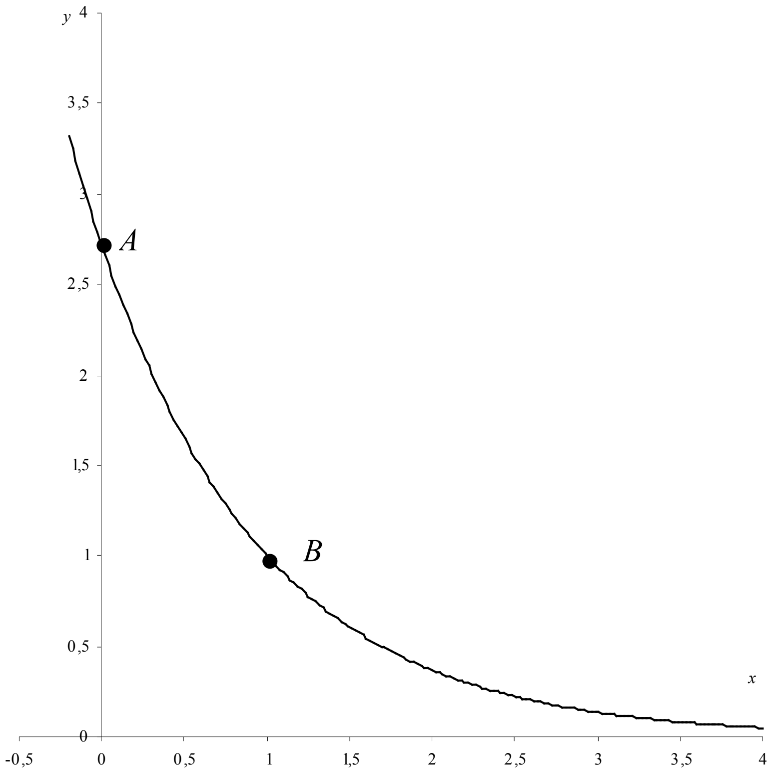
$$(E)\ y' + y = 0 \text{ et telle que } y(0) = e.$$

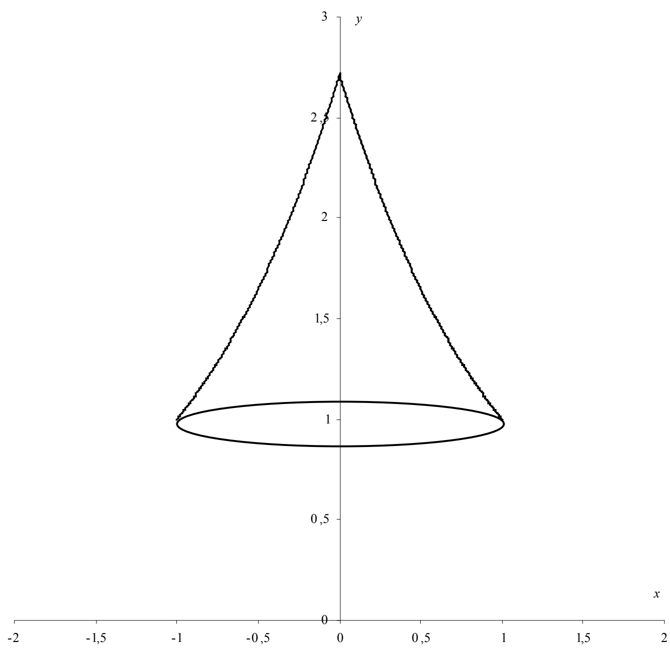
1° Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2° Soit t un réel donné de l'intervalle $[1 ; e]$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.

3° Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté sur la deuxième figure. On note V son volume et on admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 \, dt$.

Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.





Amérique du Sud novembre 2004

Exercice 2 (3 points)

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), la courbe représentative de la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) y' + y = 0 et telle que y(0) = e. 1° Déterminer f(x) pour tout x réel.

$f(x) = k\,e^{-x}$ et $f(0) = e \Leftrightarrow k\,e^0 = e \Leftrightarrow k = e$

$f(x) = e^{1-x}$

2° Soit t un réel donné de l'intervalle [1 ; e]. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation e1–x = t d'inconnue x.

$e^{1-x} = t \Leftrightarrow 1 - x = \ln t \Leftrightarrow x = 1 - \ln t$

3° Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté sur la deuxième figure. On note V son volume et on admet que V = $\pi \int_1^e$ (1 – ln t)2 dt . Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.

$$\begin{cases} u(t) = (1-\ln t)^2 \text{ et } u'(t) = 2\,(1-\ln t)\times\left(-\dfrac{1}{t}\right) \\ v'(t) = 1 \text{ et } v(t) = t \end{cases}$$

donc $\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt = [\,t\,(1-\ln t)^2\,]_1^e + \displaystyle\int_1^e 2\,(1-\ln t)\times\frac{1}{t}\times t\,dt =$

$= e\,(1-\ln e)^2 - 1\,(1-\ln 1)^2 + \int_1^e 2\,(1-\ln t)\,dt = -1 + \int_1^e 2\,(1-\ln t)\,dt$

$$\begin{cases} u(t) = 1-\ln t \text{ et } u'(t) = -\dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 2 \text{ et } v(t) = 2\,t \end{cases} \text{ donc } \int_1^e 2\,(1-\ln t)\,dt = [\,2\,t\,(1-\ln t)\,]_1^e - \int_1^e 2\,t\times\left(-\frac{1}{t}\right)dt$$

$= 2\,e\,(1-\ln e) - 2\times 1\,(1-\ln 1) + \int_1^e 2\,dt = -2 + [\,2\,t\,]_1^e = -2 + 2\,e - 2 = 2\,e - 4$

$\int_1^e (1-\ln t)^2\,dt = -1 + (2\,e - 4) = 2\,e - 4$

$V = \pi\,(2\,e - 4) \approx 4{,}51$