Polynésie mai 2004

1° Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \dfrac{1 - k\,e^x}{1 + k\,e^x}$.

a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : 2\,y' = (y - x)^2 + 1.$$

b) En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2° On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k.

Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).

3° On remarque que, pour tout x réel, on a : $f_k(x) = x - 1 + \dfrac{2}{1 + k\,e^x}$ (1) et $f_k(x) = x -+ 1 - \dfrac{2\,k\,e^x}{1 + k\,e^x}$ (2).

En déduire pour tout k strictement positif :

- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ;
- les asymptotes de la courbe C_k.

4° Cas particulier : k = 1.

a) Justifier que f_1 est impaire.

b) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$. Interpréter graphiquement le réel F(x) dans les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$. Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

c) Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

d) En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement F(x).

CORRECTION

1° Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur ℝ par : $f_k(x) = x + \frac{1 - k e^x}{1 + k e^x}$. a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle : (E) : $2 y' = (y - x)^2 + 1$.

Pour tout réel x :

$$f_k'(x) = 1 + \frac{-k e^x (1 + k e^x) - (1 - k e^x) k e^x}{(1 + k e^x)^2} = \frac{(1 + k e^x)^2 - k e^x - k^2 e^{2x} - k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2}$$

$$= \frac{1 + 2 k e^x + k^2 e^{2x} - 2 k e^x}{(1 + k e^x)^2} = \frac{1 + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2}$$

$$(f_k(x) - x)^2 + 1 = \left(\frac{1 - k e^x}{1 + k e^x}\right)^2 + 1 = \frac{1 - 2 k e^x + k^2 e^{2x} + 1 + 2 k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} = \frac{2 + 2 k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} = 2 f_k'(x)$$

f_k est bien solution de (E).

b) En déduire le sens de variations de f_k sur ℝ.

Pour tout réel x : $f_k'(x) = (f_k(x) - 1)^2 \geq 0$ donc f_k est croissante sur ℝ

2° On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k. Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées (1 ; 1).

$$O \in C_k \Leftrightarrow f_k(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + \frac{1 - k e^0}{1 + k e^0} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - k}{1 + k} = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \text{ et } 1 + k \neq 0 \Leftrightarrow k = 1.\ C = C_1$$

$$A \in C_k \Leftrightarrow f_k(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1 - k e^1}{1 + k e^1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - k e}{1 + k e} = 0 \Leftrightarrow 1 - k e = 0 \text{ et } 1 + k e \neq 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{e}$$

3° On remarque que, pour tout x réel, on a : $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k e^x}$ (1) et $f_k(x) = x -+ 1 - \frac{2 k e^x}{1 + k e^x}$ (2). En déduire pour tout k strictement positif : - la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' ; - les asymptotes de la courbe C_k.

$f_k(x) - (x - 1) = \frac{2}{1 + k e^x} > 0$ donc C_k est toujours au dessus de D

$f_k(x) - (x + 1) = -\frac{2 k e^x}{1 + k e^x} < 0$ donc C_k est toujours au dessous de D'

On pose $X = k e^x$ on a : $\lim_{x \to +\infty} k e^x = +\infty$ $(k \geq 0)$ donc $\lim_{x \to +\infty} f_k(x) - (x - 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + k e^x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{2}{1 + X} = 0$

D est asymptote à C_k en $+\infty$.

On pose $X = k e^x$ On a : $\lim_{x \to -\infty} k e^x = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) - (x + 1) = \lim_{x \to 0} \frac{2 X}{1 + X} = 0$

Donc D' est est asymptote à C_k en $-\infty$.

4° Cas particulier : k = 1. a) Justifier que f_1 est impaire.

$$f_1(x) = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

ℝ est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x :

$$f_1(-x) = -x + \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -x + \frac{e^x (1 - e^{-x})}{e^x (1 + e^{-x})} = -x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -x - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -f_1(x)$$

f_1 est donc bien paire.

b) Soit la fonction F définie sur ℝ par : $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$. Interpréter graphiquement le réel F(x) dans les deux cas : x >0 et x < 0. Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

Si x > 0

c) Déterminer les variations de F sur ℝ.

d) En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement F(x)