**Partie A** On considère la suite $(U_n)$ définie par :
pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t) e^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t) e^t$ sur [0 , 1].
En déduire la valeur de $U_1$.
Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,
$U_{n+1} = (n+1) U_n - 1$ (R)

**Partie B** On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite $(U_n)$ en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

| Valeur de n | Valeur de $U_n$ affichée par la première calculatrice | Valeur de $U_n$ affichée par la deuxième calculatrice |
|---|---|---|
| 1 | 7,1828182845 E – 01 | 7,1828182846 E – 01 |
| 2 | 4,3656365691 E – 01 | 4,3656365692 E – 01 |
| 3 | 3,0969097075 E – 01 | 3,0969097076 E – 01 |
| 4 | 2,3876388301 E – 01 | 2,3876388304 E – 01 |
| 5 | 1,9381941508 E – 01 | 1,9381941520 E – 01 |
| 6 | 1,6291649051 E – 01 | 1,6291649120 E – 01 |
| 7 | 1,4041543358 E – 01 | 1,4041543840 E – 01 |
| 8 | 1,2332346869 E – 01 | 1,2332350720 E – 01 |
| 9 | 1,0991121828 E – 01 | 1,0991156480 E – 01 |
| 10 | 9,9112182825 E – 02 | 9,9115648000 E – 01 |
| 11 | 9,0234011080 E – 02 | 9,0272128000 E – 02 |
| 12 | 8,2808132963 E – 02 | 8,3265536000 E – 02 |
| 13 | 7,6505728522 E – 02 | 8,2451968000 E – 02 |
| 14 | 7,1080199309 E – 02 | 1,5432755200 E – 01 |
| 15 | 6,6202989636 E – 02 | 1,3149132800 E + 00 |
| 16 | 5,9247834186 E – 02 | 2,0038612480 E + 01 |
| 17 | 7,2131811612 E – 03 | 3,3965641216 E + 02 |
| 18 | – 8,7016273909 E – 01 | 6,1128154189 E + 03 |
| 19 | – 1,7533092042 E + 01 | 1,1614249296 E + 05 |
| 20 | – 3,5166184085 E + 02 | 2,3228488592 E + 06 |
| 21 | – 7,3858986580 E + 03 | 4,8779825043 E + 07 |
| 22 | – 1,6249077047 E + 05 | 1,0731561499 E + 09 |
| 23 | – 3,7372887209 E + 06 | 2,4682591448 E + 10 |
| 24 | – 8,9694930302 E + 07 | 5,9238219474 E + 11 |
| 25 | – 2,2423732585 E + 09 | 1,4809554869 E + 13 |

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite $(U_n)$ quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

**Partie C** Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(U_n)$ à partir de la définition :
pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1° Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$
2° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n \, e^t \leq e \times (1-t)^n$$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

3° Déterminer la limite de la suite $(U_n)$

**Partie D** Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite $(U_n)$
$U_{n+1} = (n+1) U_n - 1$
Etant donné un réel a, on considère la suite $(V_n)$ définie par :
$V_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul, n : $V_{n+1} = (n+1) V_n - 1$
1° En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$V_n = U_n + (n!)(a + 2 - e)$ où n ! désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2° Etudier le comportement de la suite $(V_n)$ à l'infini suivant les valeurs de a.
On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$
3° En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichées par les deux calculatrices.

**Partie A On considère la suite $(U_n)$ définie par : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$**

**Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t)e^t$ sur [0 , 1]. En déduire la valeur de $U_1$.**
**Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$ (R)**

$f'(t) = -1 \times e^t + (2-t)e^t = (-1+2-t)e^t = g(t)$

$U_1 = \int_0^1 (1-t)e^t\,dt = [f(t)]_0^1 = (2-1)e^1 - (2-0)e^0 = e - 2.$

$\left.\begin{array}{l} u(t) = (1-t)^n \text{ et } u'(t) = -n(1-t)^{n-1} \\ v'(t) = e^t \text{ et } v(t) = e^t \end{array}\right\}$ donc $\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt = [(1-t)^n e^t]_0^1 - \int_0^1 \left(-n(1-t)^{n-1}\right) e^t\,dt$

Donc $U_n = (1-1)e^1 - (1-0)e^0 + n\,U_{n-1} = -1 + n\,U_{n-1}$

**Partie B On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite $(U_n)$ en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus. Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices : Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite $(U_n)$ quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?**

D'après la première calculatrice $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ et d'après la seconde $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

**Partie C Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(U_n)$ à partir de la définition : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$. 1° Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$**

$\forall x \in [0 , 1]$, $1 - t \geq 0$ donc $(1-t)^n \geq 0$ donc $(1-t)^n e^t \geq 0$

On a donc pour tout entier n , $\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt \geq 0.$

**2° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n : $(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$**

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^t \leq e^1$

En multipliant par $(1-t)^n$ qui est positif on obtient

$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$

**b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$**

On intègre les inégalité sur l'intervalle [0 , 1] on obtient : $\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e\,dt$

$$\int_0^1 (1-t)^n e\,dt = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \times e\right]_0^1 = \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} \times e - \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1} \times e = \frac{e}{n+1}$$

Donc pour tout entier n : $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

**3° Déterminer la limite de la suite $(U_n)$**

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$ et pour tout entier n , $0 \leq U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$

**Partie D Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite $(U_n)$**
**$U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$ Etant donné un réel a, on considère la suite $(V_n)$ définie par : $V_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul, n : $V_{n+1} = (n+1)V_n - 1$ .**

**1° En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,**
**$V_n = U_n + (n\,!)(a + 2 - e)$ où n ! désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls**

$\mathscr{P}(n) : V_n = U_n + (n\,!)(a+2-e)$

Initialisation : $V_1 = a$ et $U_1 + 1\,! \times (a+2-e) = e - 2 + a + 2 - e = a$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Si $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée alors $V_n = U_n + (n\,!)(a+2-e)$

$V_{n+1} = (n+1)V_n - 1 = (n+1) \times (U_n + (n\,!)(a+2-e)) - 1 = (n+1)U_n + (n+1) \times (n\,!)(a+2-e) - 1$

On sait que pour tout entier n, $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$ donc $V_{n+1} = (n+1) \times (n\,!)(a+2-e) = ((n+1)\,!)(a+2-e)$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

**2° Etudier le comportement de la suite $(V_n)$ à l'infini suivant les valeurs de a. On rappelle que $\lim_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$**

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$ on a donc

Si $a + 2 - e = 0$ c'est à dire $a = e - 2$ et pour tout entier n $V_n = U_n$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

Si $a + 2 - e < 0$ c'est à dire $a < e - 2$ $\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

Si $a + 2 - e > 0$ c'est à dire $a > e - 2$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

**3° En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichées par les deux calculatrices.**

$U_1 = 2 - e$ donc $a = 2 - e$

La première calculatrice a utilisé une valeur approchée $\alpha$ de $2 - e$ par défaut. la suite $(V_n)$ définie par $V_1 = \alpha$ et $V_{n+1} = (n+1)V_n$ diverge alors vers $-\infty$ car $V_1 < e - 2$

La seconde a utilisé une valeur approchée $\beta$ par excès . La suite $(V_n)$ définie par $V_1 = \beta$ et $V_{n+1} = (n+1)V_n$ diverge alors vers $+\infty$ car $V_1 > e - 2$