EXERCICE 3 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x + 1)$.

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est donnée en annexe.

1° a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O ?

2° On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = a\,x + b + \frac{c}{x+1}.$$

b) Calculer I.

3° A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4° Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x + 1)\,dx$.

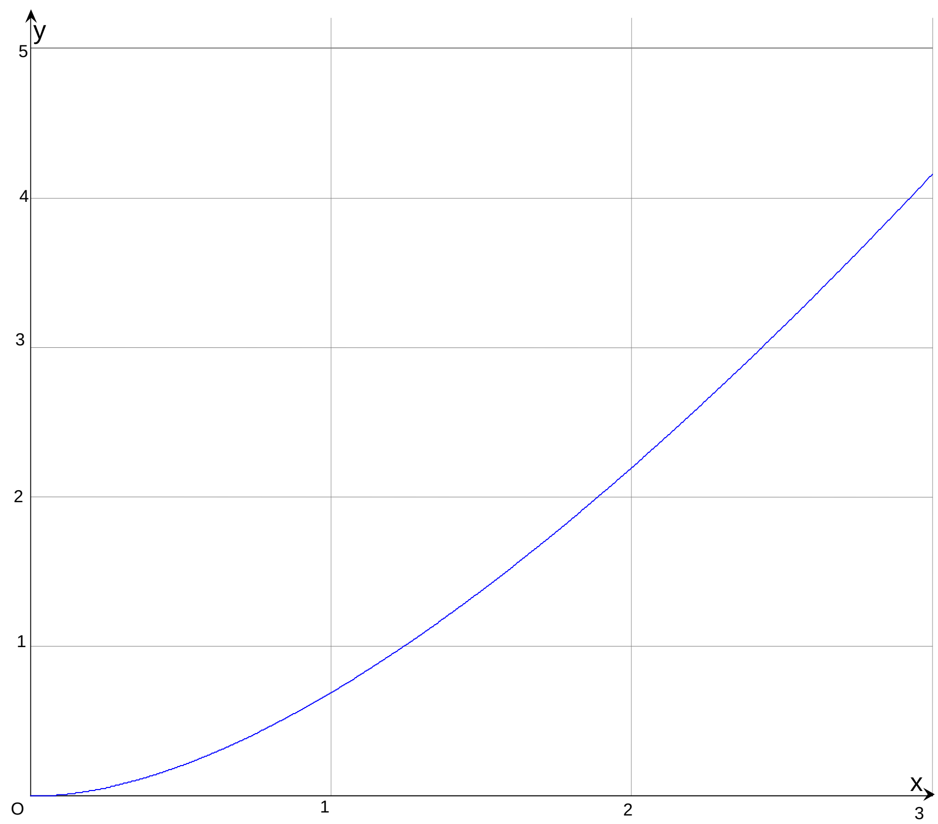
1° Déterminer le sens de variation de la suite (U_n). La suite (U_n) converge-t-elle ?

2° Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$

En déduire la limite de la suite (U_n).

Annexe Exercice3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur Courbe $(\mathscr{C})$



CORRECTION

EXERCICE 3 Partie A : étude d'une fonction Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : f (x) = x ln(x + 1). Sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthogonal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est donnée en annexe.

1° a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

f est le produit de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [

$f'(x) = 1 \times \ln(1 + x) + x \times \frac{1}{x+1} = \ln(1 + x) + \frac{x}{x+1}$.

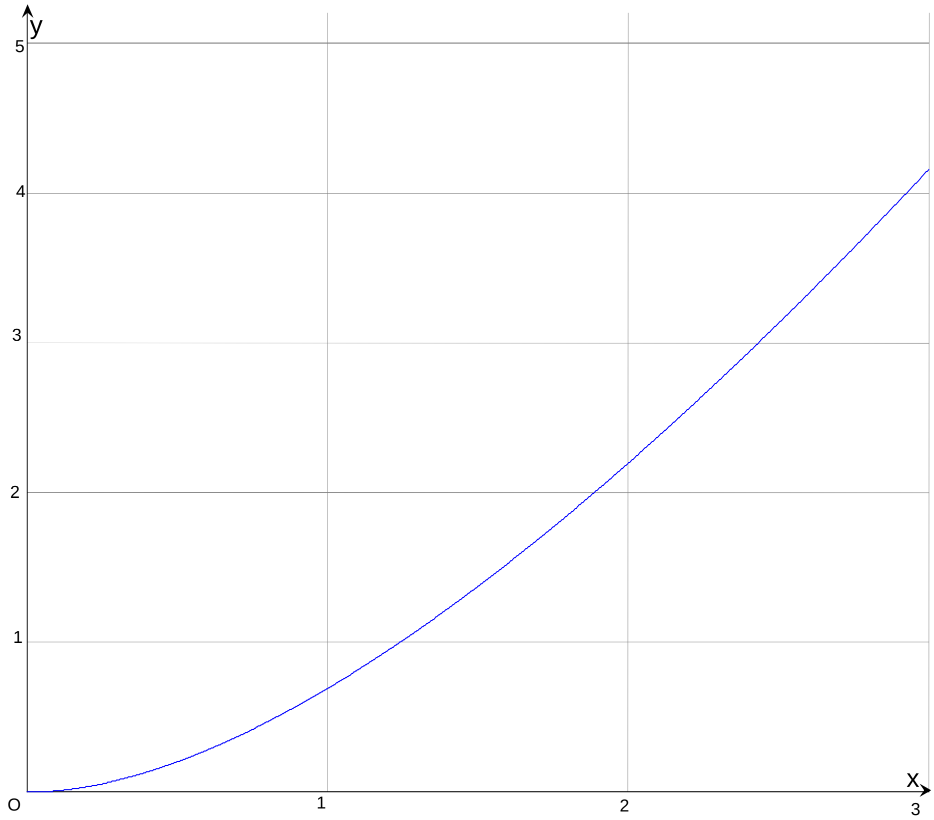
Pour tout réel x de [0 ; + ∞ [, $\ln(1 + x) \geq 0$ et $\frac{x}{x+1} \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$. f est donc croissante sur [0 ; + ∞ [.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ($\mathscr{C}$) au point O ?

$f(0) = 0 \times \ln(1 + 0) = 0$ et $f'(0) = \ln(1 + 0) + \frac{0}{0+1} = 0$ donc l'axe des abscisses est bien tangent à ($\mathscr{C}$) au point O.

Annexe Exercice3

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur Courbe ($\mathscr{C}$)



2° On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$ a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x ≠ 1, $\frac{x^2}{x+1} = a\,x + b + \frac{c}{x+1}$.

$\frac{x^2}{x+1} = a\,x + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{a\,x\,(x+1) + b\,(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{a\,x^2 + a\,x + b\,x + b + c}{x+1}$

Il suffit de prendre a, b et c solutions du système : $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = a + b \\ 0 = b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ On a donc $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

b) Calculer I.

$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1) - (0^2 - 0 + \ln(1+0)) = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

3° A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations x = 0, x = 1 et y = 0.

Pour tout réel x de [0 , 1], f(x) ≥ 0 donc A = $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\left.\begin{array}{r} u(x) = \ln(1+x) \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = x \text{ et } v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues

sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie.

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\times\ln(1+1) - \frac{0}{2}\ln(1+0) - \frac{I}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4}.$$

4° Montrer que l'équation f (x) = 0,25 admet une seule solution sur l'intervalle [0 ; 1]. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

La fonction f est croissante et continue sur [0 , 1], f(0) = 0 et f(1) = ln 2.

On sait que 0,25 ∈ [0 , ln 2] donc , d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaire on peut dire que l'équation f(x) = 0,25 admet une solution et une seule dans l'intervalle [0 , 1].

f(0,56) ≤ 0,25 ≤ f(0,565) donc 0,56 ≤ α ≤ 0,565

Partie B : étude d'une suite La suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1° Déterminer le sens de variation de la suite (U_n). La suite (U_n) converge-t-elle ?

Pour tout réel x de [0 , 1], $x^n \geq x^{n+1}$ et ln (x + 1) ≥ 0 donc $x^n \ln(x+1) \geq x^{n+1} \ln(x+1)$.

On peut intégrer les inégalités sur [0 , 1].

$\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \geq \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx$ donc $U_n \geq U_{n+1}$ donc la suite (U_n) est décroissante.

Pour tout réel x de [0 , 1], $x^n \ln(x+1) \geq 0$ donc $U_n \geq 0$.

la suite (U_n) est décroissante et est minorée par 0 elle est donc convergente.

2° Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$ En déduire la limite de la suite (U_n).

Pour tout entier naturel n non nul on a : ∀ x ∈ [0 , 1], $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(1+1)$

En intégrant les inégalité on obtient. : $0 \leq U_n \leq \int_0^1 x^n \ln 2\,dx$

$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$ donc $U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$ 0.