$\boxed{1}$ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\, e^{-x}$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1° a) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{P}$ en $+\infty$.

b) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ

2° g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

a) Calculer la dérivée de g et déterminer le signe de g'(x).

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $0{,}35 < \alpha < 0{,}36$.

3° Démontrer que $f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\,e^{\alpha})$.

4° a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto (x^2 + 2)e^{-x}$.

b) Calculer en fonction de α, l'aire A en cm^2 du domaine limité par $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$

c) Justifier que : $A = 4\,e^{2\alpha} + 8\,e^{\alpha} - 16$.

$\boxed{2}$ Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - x}$, on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^{1/2} \dfrac{e^{-x}}{1 - x}\,dx$.

1° a) En étudiant les variations de la fonction f, démontrer que pour tout nombre réel x de [0 ; 1/2]:

$1 \le f(x) \le \dfrac{2}{\sqrt{e}}$

b) En déduire que $\dfrac{1}{24} \le \displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{e^{-x}}{1 - x}\, x^2\, dx .\le \dfrac{1}{12\sqrt{e}}$

2° a) Démontrer que pour tout réel de [0 ; 1/2] : $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1 - x}$

b) En déduire que : $I = \int_0^{1/2} (1 + x)\, e^{-x}\,dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)\,dx$ c) Calculer $J = \int_0^{1/2} (1 + x)\, e^{-x}\,dx$.

d) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale I.

$\boxed{3}$ f et g sont les fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par : $f(x) = \ln(1 + x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x + 2}$

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f et Γ, celle de g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm).

1° a) Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur [0; + ∞ [par $h(x) = f(x) - g(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de [0 ; + ∞ [: $\dfrac{2x}{x + 2} \le \ln(1 + x)$

c) Etudier les variations des fonctions f et g.

d) Représenter graphiquement les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans le même repère.

e) Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et Γ l'admettent en O une même tangente $\mathscr{D}$ que l'on tracera.

2° a) Vérifier que pour $x \ne -1$: $\dfrac{x}{1 + x} = 1 - \dfrac{1}{x + 1}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$I = \int_0^1 \ln(1 + x)\,dx$

c) En déduire le calcul de $J = \int_0^1 (x - \ln(1 + x))\,dx$.

3° a) Déterminer les réels a et b tels que pour $x \ne -2$, $\dfrac{2x}{x + 2} = a + \dfrac{b}{x + 2}$.

b) En déduire le calcul de $K = \int_0^1 \left(\ln(1 + x) - \dfrac{2x}{x + 2}\right) dx$.

c) Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes $\mathscr{C}$, Γ et la droite $\mathscr{D}$.

4° u est la fonction définie sur [0 ; 1] par $u(0) = 1$ et si $x \ne 0$, $u(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$

a) Démontrer que la fonction u est continue sur [0 ; 1] .

b) On pose $L = \int_0^1 u(x)\,dx$.

Montrer que : $\int_0^1 \dfrac{2}{x + 2}\,dx \le L \le 1$. En déduire d'une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

$\boxed{1}$ 1° a) $(x^2+2)\,e^{-x} = x^2\,e^{-x} + 2\,e^{-x}$ On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\,e^{-x} = 0$

$f(x) = x - 1 + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{P}$ en $+\infty$.

b) $f(x) - (x-1) = (x^2+2)\,e^{-x} \geq 0$ Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ.

2° $g(x) = 1 - (x^2 - 2\,x + 2)\,e^{-x}$

a) $g'(x) = 0 - ((2\,x - 2)\,e^{-x} - (x^2 - 2\,x + 2))e^{-x}) = (-2\,x + 2 + x^2 - 2\,x + 2)\,e^{-x} = (x^2 - 4\,x + 4)\,e^{-x} = (x-2)^2\,e^{-x} \geq 0$

b) g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de g'	+
g	$-\infty \nearrow +\infty$

$g(0{,}35) \leq 0 \leq g(0{,}36)$ on peut donc dire qu'il existe un réel α compris entre 0,35 et 0,36 solution de l'équation $g(x) = 0$.

3° $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - (\alpha^2 - 2\,\alpha + 2)\,e^{-\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2 - 2\,\alpha + 2)\,e^{-\alpha} = 1 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2)\,e^{-\alpha} = 1 + 2\,\alpha\,e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2 + 2)\,e^{-\alpha} = \alpha - 1 + 1 + 2\,\alpha\,e^{-\alpha} = \alpha\,(1 + 2\,e^{\alpha})$.

4° a) $P(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)e^{-x}$. $P'(x) = (x^2+2)e^{-x}$

$\Leftrightarrow (2\,a\,x + b)\,e^{-x} - (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{-x} = (x^2+2)e^{-x} \Leftrightarrow (2\,a\,x + b - a\,x^2 - b\,x - c)\,e^{-x} = (x^2+2)e^{-x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2\,a - b = 0 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases} \quad P(x) = -(x^2 + 2\,x + 4)\,e^{-x}$$

c) $\mathscr{A} = \int_{-\alpha}^{0} (f(x) - (x-1))\,dx \times 4\text{ cm}^2 = \int_{-\alpha}^{0} (x^2+2)\,dx) \times 4\text{ cm}^2 = (P(0) - P(-\alpha)) \times 4\text{ cm}^2$

$= 4 \times (-4 + (\alpha^2 - 2\,\alpha + 4)\,e^{\alpha})\text{ cm}^2$

$(\alpha^2 - 2\,\alpha + 2) = e^{\alpha}$ donc $\mathscr{A} = 4 \times (-4 + (\alpha^2 - 2\,\alpha + 2)\,e^{\alpha} + 2\,e^{\alpha}) = -16 + 4\,e^{2\alpha} + 8\,e^{\alpha}$

$\boxed{2}$ 1) a) $f'(x) = \dfrac{x\,e^{-x}}{(1-x)^2}$ est du signe de x.. f est donc croissante sur [0 , 1/2]

$\forall\, x \in [\,0\,,\,1/2\,]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(1/2)$ donc $1 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{e}}$

b) $0 \leq 1/2$ et $\forall\, x \in [\,0\,,\,1/2\,]$, $1 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ et donc : $x^2 \leq x^2\,\dfrac{e^{-x}}{1-x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{e}}\,x^2$

On peut donc intégrer les inégalité entre 0 et 1/2

$$\int_0^{1/2} x^2\,dx \leq \int_0^{1/2} x^2\,\frac{e^{-x}}{1-x}\,dx \leq \int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{e}}\,x^2\,dx \text{ donc } \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} \leq \int_0^{1/2} x^2\,\frac{e^{-x}}{1-x}\,dx \leq \left[\frac{2}{\sqrt{e}} \times \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}$$

et donc $\dfrac{1}{3 \times 8} \leq \displaystyle\int_0^{1/2} x^2\,\frac{e^{-x}}{1-x}\,dx \leq \frac{2}{3\sqrt{e} \times 8}$ c'est à dire $\dfrac{1}{24} \leq \displaystyle\int_0^{1/2} x^2\,\frac{e^{-x}}{1-x}\,dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

2° a) $1 + x + \dfrac{x^2}{1-x} = \dfrac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x} = \dfrac{1 - x^2 + x^2}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx. = \int_0^{1/2} \left(1 + x + \frac{x^2}{1-x}\right) e^{-x}\,dx = \int_0^{1/2} (1+x)\,e^{-x}\,dx + \int_0^{1/2} x^2\,\frac{e^{-x}}{1-x}$$

$J = \int_0^{1/2} (1+x)\,e^{-x}\,dx$. Intégrons par parties. $\begin{cases} u(x) = 1 + x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$J = [-(1+x)\,e^{-x}]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} 1 \times (-e^{-x})\,dx = -\left(1 + \frac{1}{2}\right) e^{-1/2} + (1+0)\,e^0 - [\,e^{-x}]_0^{1/2} = -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} + e^0$$

$= -\dfrac{5}{2\sqrt{e}} + 2$

$I = J + \int_0^{1/2} x^2\,f(x)\,dx$ et $\dfrac{1}{24} \leq \int_0^{1/2} x^2\,f(x)\,dx \leq \dfrac{1}{12\sqrt{e}}$ donc $\dfrac{1}{24} + J \leq I \leq \dfrac{1}{12\sqrt{e}} + J$ on a $\dfrac{1}{24} + I \geq -3{,}4747$ et

$\dfrac{1}{12\sqrt{e}} + J \leq -3{,}4574$

$I \approx -3{,}46$

$\boxed{3}$ 1) a) $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}$

$h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+4-4x-4}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0$

donc h est croissante sur $[\,0 + \infty\,[$

b) $\forall x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $h(x) \geq h(0)$ donc $\ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2} \geq \ln(1+0) - \dfrac{2\times 0}{0+2}$ donc $\ln(1+x) \geq \dfrac{2x}{x+2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \geq 0$ f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$g'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} \geq 0$ g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

e) $f(0) = \ln(1+0) = 0$ et $g(0) = \dfrac{2\times 0}{(0+2)} = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{0+1} = 1$ et $g'(0) = \dfrac{4}{(0+2)^2} = 1$

les tangentes ont donc la même équation : $y = 0 + 1 \times (x - 0)$ c'est à dire $y = x$.

2° a) $1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$

b) $\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln(x+1) \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = 1 \text{ et } v(x) = x \end{array}\right\}$ $I = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [x\ln(x+1)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$

$= \ln 2 - 0 - \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln 2 - [x - \ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 + 0 - \ln 1 = 2\ln 2 - 1.$

c) $J = \int_0^1 (x - \ln(1+x))\,dx. = \int_0^1 x\,dx - (2\ln 2 - 1) = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\ln 2 + 1 = \dfrac{1}{2} - 2\ln 2 + 1 = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2.$

3° a) $\dfrac{2x}{x+2} = a + \dfrac{b}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{a(x+2)+b}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{ax+2a+b}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

$\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{x+2}$

b) $K = \displaystyle\int_0^1 \left((\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2})\right) dx = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{x+2}\right) dx = 2\ln 2 - 1 - [2x - 4\ln(x+2)]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1 - 2 + 4\ln 3 + 0 - 4\ln 2 = 4\ln 3 - 2\ln 2 - 3$

c) Pour tout réel x de $[\,0\;1\,]$, $\ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2} \geq 0$. Sur $[0\,,1]$, $\mathscr{C}$ est au dessus de Γ.

K représente en ua l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$.

Δ a pour équation $y = x$. et $\mathscr{C}$ a pour équation y = ln 'x+) On étudie la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

Soit $j(x) = f(x) - x = \ln(x+1) - x$. $j'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{1-x-1}{x+1} = -\dfrac{x}{x+1}$

Pour tout réel x de $[0\,,1]$, $j'(x) < 0$ donc j est décroissante sur $[\,0\,,1\,]$

$j(0) = 0$ donc pour tout réel x de $(0\,,1]$, $j(x) < 0$.

Sur $[0\,,1]$, Δ est au dessus de $\mathscr{C}$.

J représente en ua l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$.

4° a) u est le quotient de deux fonctions continues sur $]\,0\,,1\,]$ elle est donc continue sur $]\,0\,,1\,]$

Continuité en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = u(0)$ donc u en bien continue en 0.

On a vu que pour tout réel x de $[\,0\,,1\,]$, $\ln(x+1) \leq x$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$ (car $x > 0$)

On a vu que pour tout réel x de $[\,0\,,1\,]$, $\dfrac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1)$ donc $\dfrac{2}{x+2} \leq \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (car $x > 0$)

On a donc pour tout réel x de $[\,0\,,1\,]$, $\dfrac{2}{x+2} \leq \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$

On intègre les inégalités : : $\int_0^1 \dfrac{2}{x+2}\,dx \leq L \leq \int_0^1 dx \Leftrightarrow$: $\int_0^1 \dfrac{2}{x+2}\,dx \leq L \leq [x]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 \dfrac{2}{x+2}\,dx \leq L \leq 1$

$\int_0^1 \dfrac{2}{x+2}\,dx = [2\ln(x+2)]_0^1 = 2\ln 3 - 2\ln 2 \approx 0{,}81.$ $L \approx 0{,}9$