On considère la suite (I_n), $n \in \mathbb{N}$, définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1 + n + t}\,dt$.

1° a) Déterminer le sens de variation de cette suite.

b) Montrer que (I_n), est une suite positive.

c) Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\dfrac{e^{-t^2}}{1 + n + t} \leq \dfrac{1}{1 + n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n + 1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

2° On considère f et g deux fonctions définies sur [0 ; 1] par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g\text{-}(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a) Etudier le sens de variation et le signe de f.

b) En déduire le sens de variation de g sur [0 ; 1].

c) Etablir, pour tout x appartenant à [0 ; 1], l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.

d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0 ; 1].

e) Etablir l'encadrement : $\dfrac{2}{3\,(n + 2)} \leq I_n \leq \dfrac{23}{30\,(n + 1)}$.

f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leq 10^{-2}$.

CORRECTION

On considère la suite (I_n), $n \in \mathbb{N}$, définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$. 1° a) Déterminer le sens de variation de cette suite.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt - \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{2+n+t}\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}\,\frac{2+n+t-1-n-t}{(1+n+t)\,(2+n+t)}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{(1+n+t)\,(2+n+t)}\,dt$$

Pour tout réel x de [0 , 1], $\dfrac{e^{-t^2}}{(1+n+t)\,(2+n+t)} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{(1+n+t)\,(2+n+t)}\,dt \geq 0$ donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$.

La suite (I_n) est croissante.

b) Montrer que (I_n), est une suite positive.

pour tout réel x de [0 , 1], $\dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \geq 0$

c) Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

Pour tout t de [0 , 1], $e^{-1} \leq e^{-t^2} \leq e^0$ car la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

Pour tout t de [0 , 1], $0 < \dfrac{1}{1+n+t} \leq \dfrac{1}{1+n}$.

On a donc $\left.\begin{array}{l} 0 \leq e^{-t^2} \leq 1 \\ 0 \leq \dfrac{1}{1+n+t} \leq \dfrac{1}{1+n} \end{array}\right\}$ donc $0 \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \dfrac{1}{1+n}$

On intégre les inégalités sur [0 , 1] : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+n}$ donc $I_n \leq \left[\dfrac{t}{1+n}\right]_0^1$ donc $I_n \leq \dfrac{1}{1+n}$

2° On considère f et g deux fonctions définies sur [0 ; 1] par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g\text{-}(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a) Etudier le sens de variation et le signe de f.

f est la somme de trois fonctions dérivables sur [0 , 1] elle est donc croissante.

$f'(x) = -e^{-x} + 1$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. f est donc croissante sur [0 , 1]

si $0 \leq x \leq 1$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ donc $e^0 + 0 - 1 \leq f(x) \leq e^{-1} + 1 - 1$ donc $f(x) \geq 0$.

b) En déduire le sens de variation de g sur [0 ; 1].

g est la somme de quatre fonctions dérivables sur [0 ; 1] elle est donc dérivable sur [0 ; 1]

$g'(x) = -1 + \dfrac{2x}{2} + e^{-x} = f(x)$. On a vu que pour tout réel x de [0 ; 1], $f(x) \geq 0$ donc g est aussi croissante

c) Etablir, pour tout x appartenant à [0 ; 1], l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.

si $0 \leq x \leq 1$ alors $g(0) \leq g(x)$ alors $1 - 0 + \dfrac{0^2}{2} - e^0 \leq g(x)$ donc $0 \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$ donc $e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

On a vu que pour tout réel x de [0 ; 1], $f(x) \geq 0$ donc $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ donc $e^{-x} \geq 1 - x$

On a bien pour tout réel x de [0 ; 1], $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0 ; 1].

Si $t \in [\,0 ; 1\,]$ alors $t^2 \in [\,0 ; 1\,]$

Pour tout réel x de [0 ; 1], $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$ et donc en posant $x = t^2$ on obtient $1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq 1 - t^2 + \dfrac{t^4}{2}$

e) Etablir l'encadrement : $\frac{2}{3\,(n+2)} \le I_n \le \frac{23}{30\,(n+1)}$.

Pour tout réel x de [0 ; 1],

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le 1 - t^2 \ \le e^{-t2} \le 1 - t^2 + \dfrac{t^4}{2} \\ 0 \le \dfrac{1}{n+2} \le \dfrac{1}{n+1+t} \le \dfrac{1}{n+1} \end{array}\right\} \text{ donc } \frac{1-t^2}{n+2} \le \frac{e^{-t2}}{1+n+t} \le \frac{1 - t^2 + \dfrac{t^4}{2}}{n+1}$$

En intégrant ces inégalités sur [0 ; 1] on obtient : $\int_0^1 \frac{1-t^2}{n+2}\,dt \le \int_0^1 \frac{e^{-t2}}{1+n+t}\,dt \le \int_0^1 \frac{1 - t^2 + \dfrac{t^4}{2}}{n+1}\,dt$

donc $\left[\frac{1}{n+2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{1}{n+3}\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{10}\right)\right]_0^1$ donc $\frac{1}{n+2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \le I_n \le \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)$

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{30 - 10 + 3}{30} = \frac{23}{30}$ on a donc bien $\frac{2}{3\,(n+2)} \le I_n \le \frac{23}{30\,(n+1)}$.

f) Donner une valeur de p telle que $I_p \le 10^{-2}$.

Pour que $I_n \le 10^{-2}$ il suffit de prendre n tel que $\frac{23}{30\,(n+1)} \le 10^{-2}$

$\frac{23}{30\,(n+1)} \le 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{23}{30\,(n+1)} \le \frac{1}{100} \Leftrightarrow 2300 \le 30\,(n+1) \Leftrightarrow \frac{2300}{30} - 1 \le n$ il suffit donc de prendre $n \ge 76$.