La Réunion, 1997

Pour n entier naturel non nul, soit fn la fonction d´efinie sur I = [0 ; +∞[par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n\,!}\, e^{-x}$$

Soit a un élément non nul fixe dans I. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\, dx.$$

1° Calculer $I_0(a)$.

2° Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$

et en déduire que, pour tout n > 1 :

$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n}{n\,!}\, e^{-a}$.

3° En déduire que pour tout n > 0, $I_n(a) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k\,!}\right) e^{-a}$

4° Dans cette question, on pose a = 1.

On appelle (U_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$U_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\mathscr{R}$ (unité graphique : 4 cm).

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et donner une interprétation géométrique de U_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n\,!}\, x^n$$

c) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{(n+1)\,!}$ puis la limite de U_n.

d) Déduire enfin que $e = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right)$

CORRECTION

Pour n entier naturel non nul, soit fn la fonction d´efinie sur I = [0 ; +∞[par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n\,!} e^{-x}$ Soit a un élément non nul fixe dans I.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$. 1° Calculer $I_0(a)$.

$$I_0(a) = \int_0^a f_0(x)\,dx = \int_0^a \frac{1}{0\,!} e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^a = -e^{-a} + e^0 = 1 - e^{-a}.$$

2° Montrer que, pour tout x de I et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$ et en déduire que, pour tout n > 1 : $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n}{n\,!} e^{-a}$.

$$f'_n(x) = \frac{n\,x^{n-1}}{n\,!} e^{-x} + \frac{x^n}{n\,!}(-e^{-x}) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} e^{-x} - \frac{x^n}{n\,!} e^{-x} = f_{n-1}(x) - f_n(x)$$

3° En déduire que pour tout n > 0, $I_n(a) = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right) e^{-a}$

Initialisation : $I_0(a) = \dfrac{a}{n\,!}$ et $1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right) e^{-a} = 1 - \dfrac{a^0}{0\,!} e^{-a} = 1 - e^{-a}$ La propriété est vérifiée pour n = 0.

Hérédité : Soit n un entier telque $I_n(a) = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right)$

On sait que pour n + 1 ≥ 1 on a : $I_{n+1}(a) - I_n(a) = -\dfrac{a^{n+1}}{n+1} e^{-a}$ donc $I_{n+1}(a) = I_n(a) - \dfrac{a^{n+1}}{n+1} e^{-a}$

n est tel que $I_n(a) = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right)$ on a donc $I_{n+1} = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right) - \dfrac{a^{n+1}}{n+1} e^{-a} = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n+1} \dfrac{a^k}{k\,!}\right)$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $I_n(a) = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right)$

Variante : (mais c'est toujours par récurence)

Pour tout entier naturel n supétiuer ou égale à 1 on a $I_n - I_{n-1} = -\dfrac{a^n}{n\,!} e^{-a}$ donc

$$\left.\begin{array}{l} n = 1 \quad I_1 - I_0 = -\dfrac{a^1}{1\,!} e^{-a} \\ n = 2 \quad \cancel{I_2} - I_1 = -\dfrac{a^2}{2\,!} e^{-a} \\ n = 3 \quad \cancel{I_3} - \cancel{I_2} = -\dfrac{a^3}{3\,!} e^{-a} \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad I_n - I_{n-1} = -\dfrac{a^n}{n\,!} e^{-a} \end{array}\right\}$$ en ajoutant membre à membre les inégalités on obtient $I_n - I_0 = -\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right)$

c'est à dire $\cancel{I_n} = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k\,!}\right)$

4° Dans cette question, on pose a = 1. On appelle (U_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$U_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\mathscr{R}$ (unité graphique : 4 cm). a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et donner une interprétation géométrique de U_n.

Pour tout réel x de [0 ; 1], $f_n(x) \geq 0$ donc $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq 0$.

16 U_n est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonées et la droite d'équation x = 1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0 ; 1]$: $f_n(x) \leq \frac{1}{n\,!} x^n$

Pour tout réel x de [0 ; 1], $e^{-x} \leq e^0$ donc $e^{-x} \leq 1$ donc $\frac{x^n}{n\,!} e^{-x} \leq \frac{x^n}{n\,!}$

c) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)\,!}$ puis la limite de U_n.

Pour tout réel x de [0 ; 1], $f_n(x) \leq \frac{x^n}{n\,!}$ En intégrant les inégalités sur [0 ; 1] on obtient

$\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n\,!}\,dx$ et comme $\int_0^1 \frac{x^n}{n\,!}\,dx = \left[\frac{1}{n\,!} \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)\,!}$ on peut dire que $U_n \leq \frac{1}{(n+1)\,!}$

On a vu aussi que $U_n \geq 0$, on peut donc conclure.

d) Déduire enfin que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right)$

Pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)\,!}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)\,!} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

$U_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) e^{-1}$ donc $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) e^{-1} = 1 - U_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) e^{-1} = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\right) = e$.