Exercice 1 (4 points}

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci -dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.
{Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».}
Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

« Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a ;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ »

Soient f et g deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$, g ne s'annulant pas :
«Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ »

« Si f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».

On considère un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.
« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ».

« La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ ».

Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et – 2.
«Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».

Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1
« L'ensemble des points M du plan tels que $\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.
« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si M = A ou M = B ».

Exercice 2 (3 points}

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'événement : « le premier test est positif ».
On note C l'événement : « l'écran est acheminé chez le client ».
1° On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des événements T_1, et C.

2° La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 €~ de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
a) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
b) Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
c) A partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

Exercice 3 (8 points}

Partie A On considère la suite (U_n) définie par :

pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$

1° Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t)\,e^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t)\,e^t$ sur [0 , 1].

En déduire la valeur de U_1 .

2° Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$ (R)

Partie B On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (U_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de U_n affichée par la première calculatrice	Valeur de U_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845 E – 01	7,1828182846 E – 01
2	4,3656365691 E – 01	4,3656365692 E – 01
3	3,0969097075 E – 01	3,0969097076 E – 01
4	2,3876388301 E – 01	2,3876388304 E – 01
5	1,9381941508 E – 01	1,9381941520 E – 01
6	1,6291649051 E – 01	1,6291649120 E – 01
7	1,4041543358 E – 01	1,4041543840 E – 01
8	1,2332346869 E – 01	1,2332350720 E – 01
9	1,0991121828 E – 01	1,0991156480 E – 01
10	9,9112182825 E – 02	9,9115648000 E – 01
11	9,0234011080 E – 02	9,0272128000 E – 02
12	8,2808132963 E – 02	8,3265536000 E – 02
13	7,6505728522 E – 02	8,2451968000 E – 02
14	7,1080199309 E – 02	1,5432755200 E – 01
15	6,6202989636 E – 02	1,3149132800 E + 00
16	5,9247834186 E – 02	2,0038612480 E + 01
17	7,2131811612 E – 03	3,3965641216 E + 02
18	– 8,7016273909 E – 01	6,1128154189 E + 03
19	– 1,7533092042 E + 01	1,1614249296 E + 05
20	– 3,5166184085 E + 02	2,3228488592 E + 06
21	– 7,3858986580 E + 03	4,8779825043 E + 07
22	– 1,6249077047 E + 05	1,0731561499 E + 09
23	– 3,7372887209 E + 06	2,4682591448 E + 10
24	– 8,9694930302 E + 07	5,9238219474 E + 11
25	– 2,2423732585 E + 09	1,4809554869 E + 13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (U_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (U_n) à partir de la définition :

pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1° Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

2° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n \ e^t \leq e \times (1-t)^n$$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

3° Déterminer la limite de la suite (U_n)

Partie D Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (U_n)

$U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$

Etant donné un réel a, on considère la suite (V_n) définie par :

$V_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul, n : $V_{n+1} = (n+1)\,V_n - 1$

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$V_n = U_n + (n\,!)\,(a + 2 - e)$ où n ! désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

Etudier le comportement de la suite (V_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$

En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichées par les deux calculatrices.

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5cm.

On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6\,j$ et $c = 8\,j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1° Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

2° On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'

a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

Montrer que $b' = 16\,e^{-i\,\pi/3}$.

b) En déduire que O est un point de la droite (BB').

On admet que $c' = 7 + 7\,i\sqrt{3}$

c) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3° On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

a) Calculer la distance OA + OB + OC.

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$, $b = 6\,j$ et $c = 8\,j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$|\,(a - z) + (b - z)\,j^2 + (c - z)\,j\,| = |\,a + b\,j^2 + c\,j\,| = 22$.

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|\,z + z' + z''\,| \leq |\,z\,| + |\,z'\,| + |\,z''\,|.$$

Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

Exercice 1 (4 points}

« Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur [a ;+ ∞ [, alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ »

Faux : contre-exemple. la fonction f définie sur [1 , + ∞[par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Soient f et g deux fonctions définies sur [0 ; + ∞ [, g ne s'annulant pas :

«Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$ »

Faux : contre exemple. soient f et g définies sur [0 , + ∞ [par : $f(x) = -x^2$ et $g(x) = x$.

$\lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = x$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ est une forme indéterminée.

« Si f est une fonction définie sur [0 , + ∞ [telle que $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ».

Vrai : $0 \le f(x) \le \sqrt{x}$ donc en multipliant par x > 0 on obtient : $0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{\sqrt{x}}{x}$

On utilise le théorème des gendarmes. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ».

Faux : contre-exemple. la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ n'admet pas la droite d'équation x = 0 comme asymptote car $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

« La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ ».

Vrai : $f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x$

$f'(x) - f(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x - (x^2 + 3x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$

Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et – 2.

«Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».

Vrai

G bary	A	B	C
	3	– 2	1

donc par associativité

G bary	I	C
	1	1

Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1

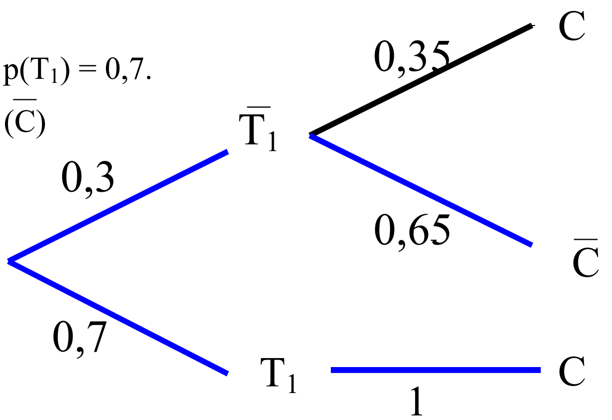
« L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1»

Faux : G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, – 2 et 1 donc

$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3 - 2 + 1)\overrightarrow{MG}$ et $\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 1 \Leftrightarrow 2\,MG = 1$

On obtient un cercle de centre G de rayon $\frac{1}{2}$

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit. Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'événement : « le premier test est positif ». On note C l'événement : « l'écran est acheminé chez le client ».
1° On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des événements T_1, et C.



1° Le test est positif pour 70 % des écrans neufs donc $p(T_1) = 0,7$.

$P(C) = P(C \cap T_1) + P(\overline{T_1} \cap C) = P(T_1) + P_{\overline{C}}(T_2) \times P(\overline{C})$

$= 0,7 + 0,3 \times 0,65 = 0,895$.

2° La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois. Cela lui coûte 50 €~ de plus si l'écran doit être testé une seconde fois. Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client. On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
a) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.

	T_1	$\overline{T_1} \cap C$	$\overline{T_1} \cap \overline{C}$
X	a – 1000	a – 1050	– 1050
p	0,7	0,195	0,105

b) Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

$E(X) = 0,7\,(a - 1000) + 0,195\,(a - 1050) - 0,105 \times 1050$
$= 0,7\,a - 700 + 0,195\,a - 204,75 - 110,25$
$= 0,895\,a - 1015$.

c) **A partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?**

$E(X) > 0 \Leftrightarrow 0,895\,a - 1015 > 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{1015}{0,895} \Leftrightarrow a > 1134,08$

Exercice 3 (8 points}

Partie A On considère la suite (U_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$

1° Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t)\,e^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t)\,e^t$ sur [0 , 1]. En déduire la valeur de U_1 .

$f'(t) = -1 \times e^t + (2-t)\,e^t = (-1+2-t)\,e^t = g(t)$

2° Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$ (R)

$U_1 = \int_0^1 (1-t)\,e^t\,dt = [f(t)]_0^1 = (2-1)\,e^1 - (2-0)\,e^0 = e - 2.$

$\left.\begin{array}{l} u(t) = (1-t)^n \text{ et } u'(t) = -n\,(1-t)^{n-1} \\ v'(t) = e^t \text{ et } v(t) = e^t \end{array}\right\}$ donc $\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt = [(1-t)^n e^t]_0^1 - \int_0^1 (-n\,(1-t)^{n-1})\,e^t\,dt$

Donc $U_n = (1-1)\,e^1 - (1-0)\,e^0 + n\,U_{n-1} = -1 + n\,U_{n-1}$

Partie B On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (U_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices : Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (U_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

D'après la première calculatrice $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ et d'après la seconde $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

partie C Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (U_n) à partir de la définition : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$. 1° Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

$\forall x \in [0 , 1]$, $1 - t \geq 0$ donc $(1-t)^n \geq 0$ donc $(1-t)^n e^t \geq 0$

On a donc pour tout entier n , $\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt \geq 0.$

2° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n : $(1-t)^n\ e^t \leq e \times (1-t)^n$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^t \leq e^1$

En multipliant par $(1-t)^n$ qui est positif on obtient

$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

On intègre les inégalité sur l'intervalle [0 , 1] on obtient : $\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e\,dt$

$$\int_0^1 (1-t)^n e\,dt = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \times e\right]_0^1 = \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} \times e - \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1} \times e = \frac{e}{n+1}$$

Donc pour tout entier n : $U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

3° Déterminer la limite de la suite (U_n)

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$ et pour tout entier n , $0 \leq U_n \leq \dfrac{e}{n+1}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$

Partie D Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (U_n) $U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$

Etant donné un réel a, on considère la suite (V_n) définie par : $V_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul, n : $V_{n+1} = (n+1)\,V_n - 1$

1° En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$V_n = U_n + (n\,!)\,(a + 2 - e)$ où n ! désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

$\mathscr{P}(n) : V_n = U_n + (n\,!)\,(a + 2 - e)$

Initialisation : $V_1 = a$ et $U_1 + 1\,! \times (a + 2 - e) = e - 2 + a + 2 - e = a$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Si $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée alors $V_n = U_n + (n\,!)\,(a + 2 - e)$

$V_{n+1} = (n+1)\,V_n - 1 = (n+1) \times (U_n + (n\,!)\,(a + 2 - e)) - 1 = (n+1)\,U_n + (n+1) \times (n\,!)\,(a + 2 - e) - 1$

On sait que pour tout entier n,

$U_{n+1} = (n+1)\,U_n - 1$ donc $V_{n+1} = (n+1) \times (n\,!)\,(a + 2 - e) = ((n+1)\,!)\,(a + 2 - e)$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

2° Etudier le comportement de la suite (V_n) à l'infini suivant les valeurs de a. On rappelle que $\lim_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$ on a donc

Si $a + 2 - e = 0$ c'est à dire $a = e - 2$ et pour tout entier n $V_n = U_n$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

Si $a + 2 - e \leq 0$ c'est à dire $a \leq e - 2$ $\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

Si $a + 2 - e = 0$ c'est à dire $a \geq e - 2$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

3° En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichées par les deux calculatrices.

la première calculatrice a utilisé une valeur approchée de 2 – e par défaut et la seconde une valeur approchée par excès

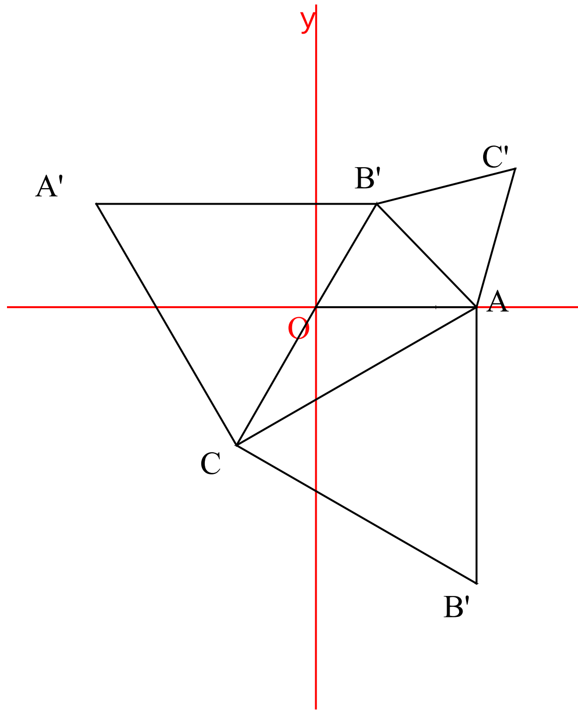
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5cm.
On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$
On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 8, b = 6 j et c = 8 j^2.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1° Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.



2° On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'
a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
Montrer que b' = 16 $e^{-i\pi/3}$.

$a' - c = e^{i\pi/3}(b - c)$ donc

$a' = 8j^2 + e^{i\pi/3}(6j - 8j^2) = 8e^{4i\pi/3} + e^{i\pi/3}(6e^{2i\pi/3} - 8e^{4i\pi/3})$

$= 8e^{4i\pi/3} + 6e^{3i\pi/3} - 8e^{5i\pi/3} = 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6 - 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -4 - 4i\sqrt{3} - 6 - 4 + 4i\sqrt{3} = -14.$

$b' - a = e^{i\pi/3}(c - a)$ donc $b = 8 + e^{i\pi/3}(8e^{4i\pi/3} - 8)$

$= 8 + 8e^{5i\pi/3} - 8e^{i\pi/3} = 8 + 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 8 + 4 - 4i\sqrt{3} - 4 - 4i\sqrt{3} = 8 - 8i\sqrt{3} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{-i\pi/3}$

b) En déduire que O est un point de la droite (BB').

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg b' - \arg b + 2k\pi = \arg\left(\frac{b'}{b}\right)$

$\arg \frac{16e^{-i\pi/3}}{6e^{2i\pi/3}} + 2k\pi = \arg\left(\frac{8}{3}e^{-3i\pi/33}\right) + 2k\pi = \arg\left(-\frac{8}{3}\right) = \pi + 2k\pi$

O, B et B ' sont donc alignés.

On admet que c' = 7 + 7 i $\sqrt{3}$ c) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \arg\left(\frac{a'}{a}\right) + 2k\pi = \arg\left(\frac{-14}{8}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$ donc $O \in (AA')$

$c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 14\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14e^{i\pi/3}$

$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}) = \arg\left(\frac{c'}{c}\right) + 2k\pi = \arg\left(\frac{14e^{i\pi/3}}{8e^{4i\pi/3}}\right) + 2k\pi = \arg\left(\frac{7}{4}e^{-3i\pi/3}\right) + 2k\pi = \pi + 2k\pi$ donc $O \in (CC')$.

3° On se propose désormais de montrer que la distance MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.
a) Calculer la distance OA + OB + OC.

° OA + OB + OC = | a | + | b | + | c | = 8 + 6 + 8 = 22.

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22$.

$j^3 = (e^{2i\pi/3})^3 = e^{2i\pi} = 1.\ 1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$

c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que a = 8, b = 6 j et c = 8 j^2.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a - z + bj^2 - zj^2 + cj - zj| = = |a + bj + cj^2 + z(1 + j + j^2)|$
$= |a + bj^2 + cj| = |8 + 6j \times j^2 + 8j^2 \times j| = |8 + 6 + 8| = 22.$

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' : $|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|$.
Montrer que MA + MB + MC est minimale lorsque M = O.

$MA + MB + MC = |z - a| + |z - b| + |z - c| = |z - a| + |(z - b)j| + |(z - c)j^2|$ car j et j^2 sont de module 1.
$|z - a| + |(z - b)j| + |(z - c)j^2| \geq |z - a + (z - b)j + (z - c)j^2|$ et $|z - a + (z - b)j + (z - c)j^2| = 22$
Donc : $MA + MB + MC \leq 22$.