Antilles-Guyane septembre 2002

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = (\ln x) \times \ln(1-x), \text{ pour } x \in \,]0\,,1\,[\end{cases}$$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant : pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$.

Partie A - Etude de la fonction f

1° a) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

b) En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2° Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$ Que peut-on en conclure pour C ?

3° Soit φ la fonction définie sur] 0 ; 1[par : $\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$.

a) Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur] 0 ; 1[.

b) Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur] 0 ; 1 [(on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur] 0 ; 1 [.

c) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur] 0 ; 1 [.

4° a) Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur] 0 ; 1 [.

b) Donner le tableau de variations de f .

c) Montrer que, pour tout $x \in \,]0\,;1\,[$, les inégalités suivantes sont vraies : $0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$.

d) Tracer C .

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0\,,\frac{1}{2}\right[$, on pose : $I_1(t) = \displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x \, dx$, $I_2(t) = \displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x \, dx$, $I(t) = \displaystyle\int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$.

1° a) A l'aide d'intégrations par parties, montrer que :

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2 \ln t + \frac{t^2}{4} \quad \text{et} \quad I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3 \ln t}{3} + \frac{t^3}{9}$$

b) Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

2° Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ par $g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right]$ et $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$

a) Etudier sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x) - g(x)$.

b) En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ $\ln(1 - x) \leq g(x)$.

c) Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ $\ln(1-x) \geq h(x)$.

d) En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.

3° a) Montrer que $-I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) \leq I(t) \leq -I_1(t) - I_2(t)$.

b) En supposant que I(t) admet une limite notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ .

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = (\ln x) \times \ln(1-x), \text{ pour } x \in]\,0\,,1\,[\end{cases}$ **où ln désigne la fonction logarithme népérien.**

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant : pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$.

Partie A - Etude de la fonction f 1° a) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

On sait que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{-x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$.

On démontre (hors sujet) que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(x) = x \ln x \times \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

On démontre (hors sujet) que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

On pose $X = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - X$ $\quad f(x) = \ln(1-X)\ln X = f(X)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} 1 - x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln(1-X)\ln X \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

b) En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

$\dfrac{f(x)}{x} = \ln x \times \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \times \dfrac{\ln(1-x)}{x} = +\infty$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x}$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Comme f est continue on peut dire que $\mathscr{C}$ admet en O une tangente verticale.

2° Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$ Que peut-on en conclure pour C ?

$f\left(\frac{1}{2}-x\right) = \ln\left(\frac{1}{2}-x\right) \times \ln\left(1-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}-x\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}+x\right)$

$f\left(\frac{1}{2}+x\right) = \ln\left(\frac{1}{2}+x\right) \times \ln\left(1-\left(\frac{1}{2}+x\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}+x\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$ on a donc bien $f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$

La droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est donc axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc par symétrie on peut dire que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = +\infty$

3° Soit φ la fonction définie sur] 0 ; 1[par : $\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x$.

a) Déterminer φ '(x), puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ ' sur] 0 ; 1[.

$\varphi'(x) = -\ln(1-x) + (1-x) \times \dfrac{-1}{1-x} - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln(1-x) - \ln x - 2$

$\varphi''(x) = -\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-(1-x)}{x(1-x)} = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$

Pour tout réel x de] 0 ; 1 [, $x(1-x) < 0$

donc $\varphi''(x)$ est du signe de $2x - 1$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
φ'		$\searrow$	$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

b) Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur] 0 ; 1 [(on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur] 0 ; 1 [.

$$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2\ln 2 - 2 < 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} -\ln(1-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} (-\ln(1-x) - \ln x - 2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} -\ln(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} -\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} (-\ln(1-x) - \ln x - 2) = +\infty$

φ' est continue et strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$, $0 \in \varphi'\left(]0, \frac{1}{2}[\right)$ donc l'équation $\varphi'(x) = 0$ admet une et une seule solution α_1 dans l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$

De même donc l'équation $\varphi'(x) = 0$ admet une et une seule solution α_2 dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$

D'après les variations de φ' on peut dire que

x	0		α_1		α_2		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur] 0 ; 1 [.

$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 1-x = 1 \\ \text{et } \lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln 1 = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to 0} (1-x)\ln(1-x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} (1-x)\ln(1-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to 0} (1-x)\ln(1-x) - x\ln x = 0$$

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		α_2		1
$\varphi'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
φ	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

$X = 1-x \Leftrightarrow x = 1-X$ et $\varphi(x) = X\ln X - (1-X)\ln(1-X) = -\varphi(X)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} 1-x = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \varphi(X) = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = \lim\limits_{X\to 0} -\varphi(X) = 0$$

$$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

On a vu que $\alpha_1 < \frac{1}{2} < \alpha_2$ donc d'après les variations de φ

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

4° a) Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur] 0 ; 1 [.

$f(x) = (\ln x) \times \ln(1-x)$. f est le produit de deux fonctions dérivables sur]0 ; 1[, elle est donc dérivable sur]0;1[.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times \ln(1-x) + \ln x \times \frac{-1}{1-x} = \frac{(1-x)\ln(1-x) - x\ln x}{x(1-x)} = \frac{\varphi(x)}{x(1-x)}$$

Pour tout réel x de] 0 ; 1 [, $x(1-x) > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.

b) Donner le tableau de variations de f .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = (\ln 2)^2$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$(\ln 2)^2$	$\searrow$	0

c) Montrer que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, les inégalités suivantes sont vraies : $0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$.

d'après les variations de f on peut dire que pour tout réel x de] 0 ; 1[, $0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

c'est à dire $0 \leq (\ln x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$

d) Tracer C .

Partie B - Encadrement d'une intégrale Pour t ∈] 0 , $\frac{1}{2}$ [, on pose : $I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x \, dx$, $I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x \, dx$, $I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x) \, dx$.

1° a) A l'aide d'intégrations par parties, montrer que : $I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2} t^2 \ln t + \frac{t^2}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x \text{ et } v(x) = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur

l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie. $I_1(t) = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_t^{\frac{1}{2}} - \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \, dx$

$$I_1(t) = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{t^2 \ln t}{2} \ln t - \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2} \, dx = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{t^2 \ln t}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_t^{\frac{1}{2}} = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{1}{16} + \frac{t^2}{4}$$

$\left.\begin{array}{l} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\}$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur

l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie. $I_2(t) = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_t^{\frac{1}{2}} - \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} \, dx$

$$I_2(t) = \frac{1}{24} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{t^3}{3} \ln t - \left[\frac{x^3}{9}\right]_t^{\frac{1}{2}} = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{t^3 \ln t}{3} - \frac{1}{72} + \frac{t^3}{9}$$

b) Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

$$\lim_{t \to 0} I_1(t) = \lim_{t \to 0} -\frac{\ln 2}{8} - \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{1}{16} + \frac{t^2}{4} = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16}$$

$\lim\limits_{t \to 0} -\frac{\ln 2}{24} - \frac{t^3 \ln t}{3} - \frac{1}{72} + \frac{t^3}{9} = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72}$ donc $\lim\limits_{t \to 0} I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72}$

2° Soit g et h les fonctions définies sur] 0 ; $\frac{1}{2}$ [par $g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right]$ et $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$

a) Etudier sur] 0 ; $\frac{1}{2}$ [les variations de la fonction $x \longmapsto \ln(1 - x) - g(x)$.

Soit g_1 définie sur] 0 ; $\frac{1}{2}$ [par $g_1(x) = \ln(1 - x) + \left[x + \frac{x^2}{2}\right]$

g_1 est dérivable sur] 0 ; 1[et $g_1'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + x = \frac{-1 + (1 + x)(1 - x)}{1 - x} = \frac{-1 + 1 - x^2}{1 - x} = -\frac{x^2}{1 - x}$

pour tout réel x de] 0 ; 1[, $g_1'(x) \leq 0$ donc g_1 est décroissante sur] 0 ; 1[

b) En déduire que, pour tout x ∈] 0 ; $\frac{1}{2}$ [$\ln(1 - x) \leq g(x)$.

$g_1(0) = \ln(1 - 0) - g(0) = 0$ et g_1 décroissante sur] 0 ; $\frac{1}{2}$ [

donc pour tout réel x de] 0 ; $\frac{1}{2}$ [$g_1(x) \leq 0$ donc $\ln(1 - x) \leq g(x)$

c) Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ $\ln(1-x) \geq h(x)$.

Soit h_1 la fonction définie sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ par $h_1(x) = \ln(1-x) - h(x) = \ln(1-x) - g(x) + \frac{x^2}{2} = \ln(1-x) + x + x^2$

h_1 estdérivable sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ et

x	0		$\frac{1}{2}$		1
x	0	+		+	
1 – 2 x		+	0	–	
1 – x		+		+	0
P(x)					

$h_1'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{-1 + (1+2x)(1-x)}{1-x}$

$= \frac{-1+1-x+2x-2x^2}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x}$

Donc sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ $h_1(x) \geq 0$ donc h_1 est croissante sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$

$h_1(0) = \ln(1-0) + 0 + 0^2 = 0$ donc pour tout réel x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, $h_1(x) \geq 0$ et donc $\ln(1-x) \geq h(x)$

d) En déduire un encadrement de f (x) sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.

Pour tout réel x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, $\ln x \leq 0$ et $h(x) \leq \ln(1-x) \leq g(x)$ donc $h(x) \times \ln x \geq (\ln x) \times \ln(1-x) \geq \ln x \times g(x)$

c'est à dire

$\ln x \times \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq \ln x \times (-x - x^2)$

3° a) Montrer que $-I_1(t) - \frac{1}{2} I_2(t) \leq I(t) \leq -I_1(t) - I_2(t)$.

Pour tout réel x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, $\ln x \times \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq \ln x \times (-x - x^2)$

On peut intégrer les inégalités sur l'intervalle $\left]t\,;\frac{1}{2}\right[$.

$$\int_t^{\frac{1}{2}} -\ln x\left(x + \frac{x^2}{2}\right) dx \leq \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \leq \int_t^{\frac{1}{2}} -\ln x\,(x + x^2)\,dx$$

donc $-\int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x\,dx - \frac{1}{2}\int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x\,dx \leq I(t) \leq -\int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x\,dx - \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x\,dx$

donc $-I_1(t) - \frac{1}{2} I_2(t) \leq I(t) \leq -I_1(t) - I_2(t)$.

b) En supposant que I(t) admet une limite notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ.

$\lim\limits_{t \to 0} I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16}$ et $\lim\limits_{t \to 0} I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72}$ donc

$\frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{48} + \frac{1}{144} \leq \ell \leq \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{24} + \frac{1}{72}$ donc

$0{,}170 \leq \frac{21 \ln 2 + 10}{144} \leq \ell \leq \frac{24 \ln 2 + 11}{144} \leq 0{,}192$