France septembre 2004 EXERCICE 2 6 points

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle] 0 ; + ∞ [, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1° Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

2° Soit h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

a) Rappeler la limite de la fonction h en + ∞ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b) Calculer h'(x), où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h.
Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3° Soit λ un élément de l'intervalle $] 0 , \frac{1}{e} [$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle] 1 ; e [et d'un unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tels que h(a) = h(b) = λ.

Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

4° On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle]1 ; e [, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tel que h(a) = h(b) (on ne cherchera pas à exprimer s(a) en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

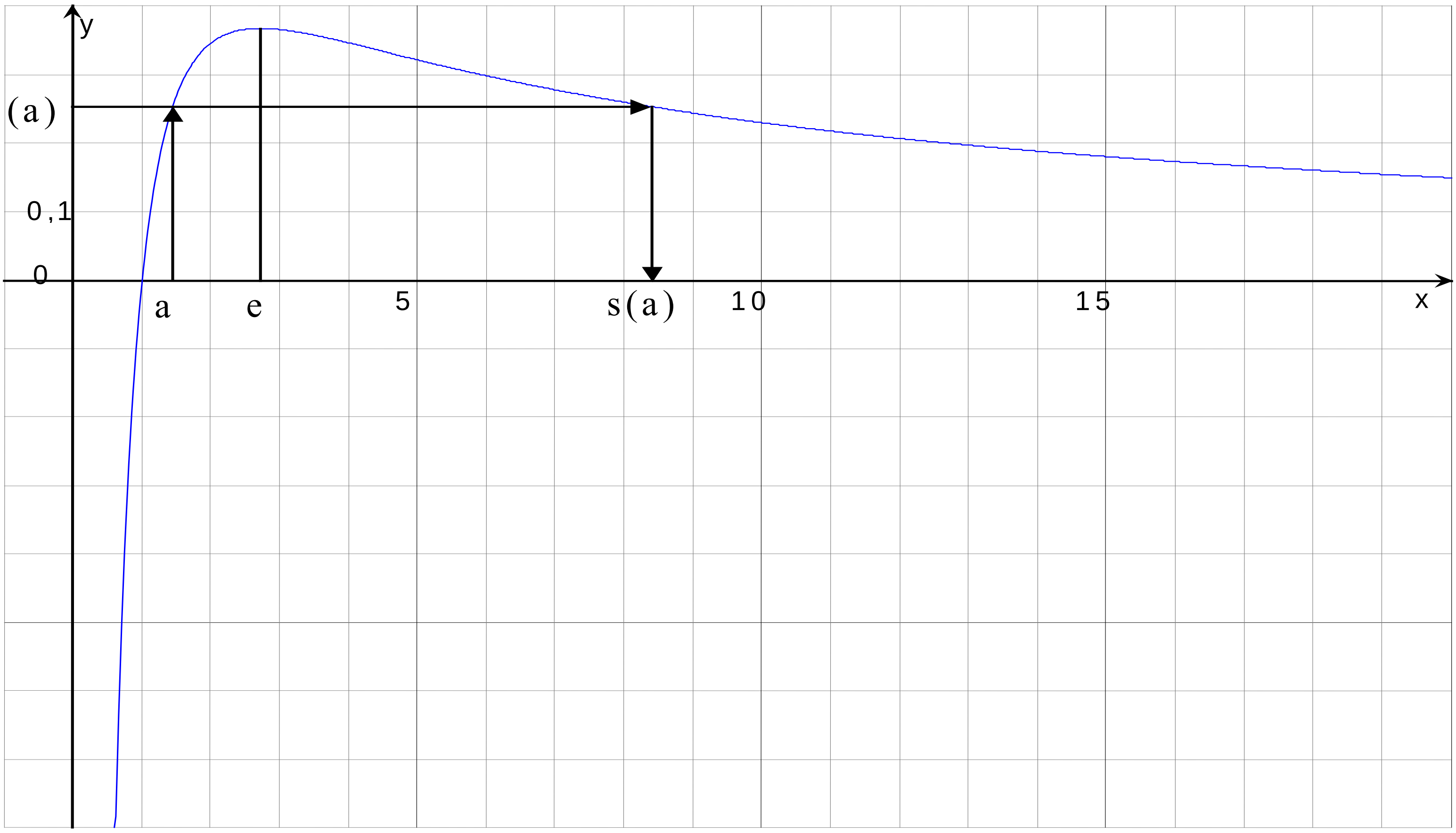
a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s

5° Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

CORRECTION


y
(a)
0,1
0
a
e
5
s(a)
10
15
x

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle] 0 ; + ∞ [, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers. 1° Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

x > 0 et y > 0. On a : $x^y = y^x \Leftrightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x) \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$

2° Soit h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$. La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

a) Rappeler la limite de la fonction h en + ∞ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. (croissances comparrée des fonctions ln et $x \longmapsto x$.

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

b) Calculer h '(x), où h ' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h. Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur] 0 ; + ∞ [donc h est dérivable sur] 0 ; + ∞ [

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln x \Leftrightarrow x \leq e.$$

x	0		e		+∞
signe de h '		+	0	−	
h	− ∞	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

On a donc $x_0 = e$ et $f(x_0) = \frac{1}{e}$

c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Il faut résoudre l'équation h-(x) = 0. $\frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

3° Soit λ un élément de l'intervalle] 0 , $\frac{1}{e}$ [. Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle] 1 ; e [et d'un unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tels que h(a) = h(b) = λ. Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

La fonction h est continue et strictement croissante sur] 1 , e [, h(1) = 0 et $h(e) = \frac{1}{e}$.

λ appartient] 0 , $\frac{1}{e}$ [donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation h(x) = λ admet une solution a dans l'intervalle] 1 , e [

La fonction h est continue et strictement croissante sur] e , + ∞ [, $h(e) = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

λ appartient] 0 , $\frac{1}{e}$ [donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation h(x) = λ admet une solution b dans l'intervalle] e ; + ∞ [

4° On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle]1 ; e [, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tel que h(a) = h(b) (on ne cherchera pas à exprimer s(a) en fonction de a). Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

Quand a tend vers 1 alors λ = h(a) tend vers 0 et b = s(a) tend vers + ∞

b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

Quand a tend vers e alors λ = h(a) tend vers $\frac{1}{e}$ et b = s(a) tend vers e.

a	1		e
s	+∞	↘	e

c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

Quand a augmente λ augmante aussi et b = s(a) diminue.

Donc s est décroissante sur] 1 , e [

5° Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

2 est le seul entier naturel de l'intervalle] 1 , e [. h(2) = h(4) donc le couple (2,4) est le seul couple d'entier distincts solution de (E).