Polynésie septembre 2001 Problème 11 points

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + \cos x)\, e^{1-x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1° Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

2° a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

c) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3° a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} < f(x) < 3\, e^{1-x}$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4° a) Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5° Représenter la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; \pi]$.

Partie B

On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1° Montrer que : $\mathscr{A} = 2e - 2 + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt$.

2° On pose : $I = \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt$ et $J = \int_0^1 \sin t\, e^{1-t}\, dt$.

a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + I$.

b) En déduire la valeur de I.

3° Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ si à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1° a) Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2° a) Déterminer $\ln(f(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Etudier le sens de variations de la fonction H.

c) Déterminer le tableau de variations de H.

3° On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$.

(On ne demande pas de représenter Γ.)

On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a) Etudier la position relative de Γ et de Δ.

b) Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4° a) Etablir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de Γ et T.

5° Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

CORRECTION

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. Partie A Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + \cos x)\, e^{1-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$. 1° Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le \cos x \le 1$ donc $2 + \cos x \ge 2 - 1 > 0$

$\forall \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$ donc $f(x) > 0$.

2° a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$

donc $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \cos x + \sin x$.

b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

Pour tout réel x on a : $2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge 2 - \sqrt{2} > 0$

c) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} u(x) = 2 + \cos x \text{ donc } u'(x) = -\sin x \\ v(x) = e^{1-x} \text{ donc } v'(x) = -e^{1-x} \end{array}\right\} f'(x) = -\sin x\, e^{1-x} + (2 + \cos x) \times (-e^{1-x}) = -e^{1-x}(2 + \cos x + \sin x)$$

Pour tout réel x , $e^{1-x} > 0$ et $2 + \cos x + \sin x > 0$ donc $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3° a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} < f(x) < 3\, e^{1-x}$.

Pour tout réel x

$-1 \le \cos x \le 1$ donc $2 - 1 \le 2 + \cos x \le 2 + 1$ donc $1 \le 2 + \cos x \le 3$ donc $e^{1-x} \le (2 + \cos x)\, e^{1-x} \le 3\, e^{1-x}$ car $e^{1-x} > 0$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On pose $X = 1 - x$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\, e^{1-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} 3\, e^{X} = 0$

d'après le théorème des gendarmes on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$.

c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

4° a) Montrer que, sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

f est continue et strictement décroissante sur $[\ 0\ ,\ \pi\ ]$, $f(0) = (2 + 1 + 0)\, e^{1-0} = 3\, e$ et $f(\pi) = (2 - 1 + 0)\, e^{1-\pi} = e^{1-\pi}$

Comme $3 \in [\ e^{1-\pi}\ ,\ 3\, e\ ]$ on peut dire, en utilisant le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 3$ a une solution unique dans $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

$f(0{,}87) > 3 > f(0{,}88)$ donc $-0{,}87 < \alpha < 0{,}88$.

5° Représenter la courbe $\mathscr{C}$ sur $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$. voir plus bas .

Partie B On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. 1° Montrer que : $\mathscr{A} = 2\, e - 2 + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt$.

$\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses donc :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 2\, e^{1-x}\, dx + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt$$

$$= \left[-2\, e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt = -2\, e^0 + 2\, e^{1-0} + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt = 2\, e - 2 + \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt$$

2° On pose : $I = \int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\, dt$ et $J = \int_0^1 \sin t\, e^{1-t}\, dt$. a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + I$.

$\left\{\begin{array}{l} u(x) = \cos x \text{ et } u'(x) = -\sin x \\ v'(x) = e^{1-x} \text{ et } v(x) = -e^{1-x} \end{array}\right.$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie.

$$I = \left[\cos x \times (-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (-\sin x)(-e^{1-x})\, dx = -\cos 1\, e^0 + \cos 0\, e^{1-0} - J = -\cos 1 + e - J$$

$\left\{\begin{array}{l} u(x) = e^{1-x} \text{ et } u'(x) = -e^{1-x} \\ v'(x) = \cos x \text{ et } v(x) = \sin x \end{array}\right.$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie :

$I = [\sin x\, e^{1-x}]_0^1 - \int \sin x \times (-e^{1-x})\, dx = \sin 1\, e^{1-1} - \sin 0\, e^{1-0} + J = \sin 1 + J$ donc $J = I - \sin 1$.

b) En déduire la valeur de I.

$I = -\cos 1 + e - J = -\cos 1 + e - (I - \sin 1) = -\cos 1 + e - I + \sin 1$ donc $2I = \sin 1 - \cos 1 + e$

et donc $I = \dfrac{\sin 1 - \cos 1 + e}{2}$

3° Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ si à 10^{-2} près par défaut.

$\mathcal{A} = 2e - 2 + I = 2e - 2 + \dfrac{\sin 1 - \cos 1 + e}{2} = \dfrac{4e - 4 + \sin 1 - \cos 1 + e}{2} = \dfrac{5e - 4 + \sin 1 - \cos 1}{2} \approx 4{,}96$.

L'aire cherchée est égale à $4 \times 2 \times \mathcal{A}$ cm^2 $\approx 39{,}57$ cm^2

Partie C Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. 1° a) Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

x fonction $\dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ elle est donc continue là où elle est définie c'est à dire sur $\mathbb{R}$. La fonction h est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur (1 + ln 3).

$u(x) = 2 + \cos x$ et $u'(x) = -\sin x$ donc $-\dfrac{\sin x}{2 + \cos x} = \dfrac{u'}{u}$ admet des primitives de la forme $x \longmapsto \ln|2 + \cos x| + C$ où c est une constante .

Les primitives de h sont donc de la forme $H(x) = -x + \ln|2 + \cos x| + C$

Pour tout réel x, $2 + \cos x > 0$ donc $H(x) = -x + \ln(2 + \cos x) + C$

$H(0) = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow -0 + \ln(2 + \cos 0) + C = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 + C = 1 + \ln 3 \Leftrightarrow c = 1$ et donc la fonction H est définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = -x + \ln(2 + \cos x) + 1$.

2° a) Déterminer ln (f (x)) pour tout x de $\mathbb{R}$.

$\ln(f(x) = \ln((2 + \cos x)\, e^{1-x}) = \ln(2 + \cos x) + \ln(e^{1-x}) = 1 - x + \ln(2 + \cos x) = H(x)$

b) Etudier le sens de variations de la fonction H.

$H(x) = \ln(f(x))$ donc $H'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

On a vu que pour tout réel x $f(x) > 0$ donc $H'(x)$ est du signe de $f'(x)$.

On a vu que pour tout réel x $f'(x) < 0$ donc $h'(x) < 0$ donc H est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Variante : $H'(x) = h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x} = -\dfrac{2 + \cos x \text{-+} \sin x}{2 + \cos x}$.

on a vu que pour tout réel x , $2 + \cos x + \sin x > 0$ et $2 + \cos x > 0$ donc $H'(x) > 0$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de H'	$-$
H	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

c) Déterminer le tableau de variations de H.

pour tout réel x, $1 - x + \ln(2 - 1) \leq 1 - x + \ln(2 + \cos x) \leq 1 - x + \ln(2 + 1)$

Pour tout réel x, $1 - x \leq H(x) \leq 1 - x + \ln 3$. d'après les théorèmes de compraison de limites on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} H(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x + \ln 3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} H(x) = -\infty$

3° On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$.
(On ne demande pas de représenter Γ.) On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$. a) Etudier la position relative de Γ et de Δ.

$H(x) - (-x + 1) = \ln(2 + \cos x)$. Pour tout réel x , $2 + \cos x \geq 2 - 1 \geq 1$ donc $\ln(2 + \cos x) \geq 0$.

Γ est toujours au-dessus de Δ

b) Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

$H(x) = 1 - x \Leftrightarrow \ln(2 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

4° a) Etablir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

$H(0) = 1 - 0 + \ln(2 + \cos 0) = 1 + \ln 3$ et $H'(0) = -1 - \dfrac{\sin 0}{2 + \cos 0} = -1$

$y = H(0) + H'(0) \times (x - 0) \Leftrightarrow y = \ln 3 + 1 - x$.

b) Etudier la position relative de Γ et T.

$H(x) - (\ln 3 + 1 - x) = \ln(2 + \cos x) - \ln 3 = \ln\left(\dfrac{2 + \cos x}{3}\right)$

Pour tout réel x $2 + \cos x \geq 3$ donc $\dfrac{2 + \cos x}{3} \geq 1$ donc $\ln\left(\dfrac{2 + \cos x}{3}\right) \geq 0$ donc $H(x) \geq \ln 3 + 1 - x$

Γ est au dessus de T.

5° Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

On a vu que pour tout réel x, $1 - x \leq H(x) \leq 1 - x + \ln 3$.

Γ est donc entre les droites T et Δ.