Amérique du Nord 1998

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{1 + n\ln(x)}{x^2}$

PARTIE A

I : Etude des fonctions f_n

1° Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est :

$$n - 2 - 2n\ln(x).$$

2° Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$

3° Déterminer la limite de f_n en $+\infty$

4° Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm). On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1° Tracer $(\mathscr{C}_2)$et $(\mathscr{C}_3)$.

2° a) Calculer $f_{n+1} - f_n$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $(\mathscr{C}_n)$ à partir de $(\mathscr{C}_2)$ et$(\mathscr{C}_3)$.

PARTIE B Calculs d'aires

1° Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

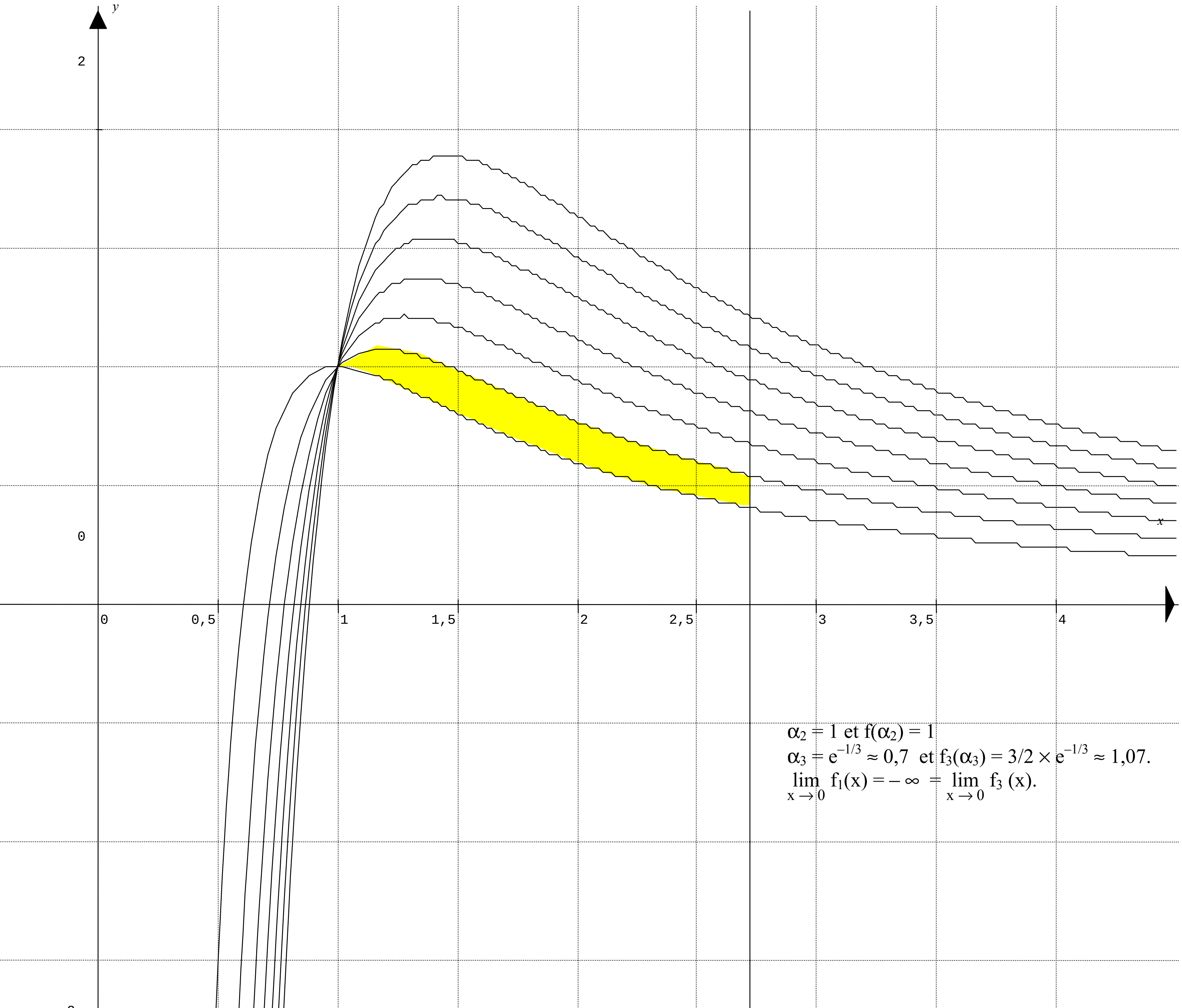
2° En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_n)$et $(\mathscr{C}_{n+1})$ et les droites d'équations x = 1 et x = e.

3° On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équations y = 0, x = 1 et x = e.

a) Calculer A_2.

b) Déterminer la nature de la suite (A_n)en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

CORRECTION



$\alpha_2 = 1$ et $f(\alpha_2) = 1$

$\alpha_3 = e^{-1/3} \approx 0{,}7$ et $f_3(\alpha_3) = 3/2 \times e^{-1/3} \approx 1{,}07$.

$\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to 0} f_3(x)$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ 1° $f_n'(x) = \dfrac{\frac{n}{x} \times x^2 - 2x \times (1 + n\ln(x))}{x^4} = \dfrac{nx - 2x - 2nx\ln(x)}{x^4} = \dfrac{n - 2 - 2n\ln(x)}{x^3}$

2° $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{n-2-2n\ln(x)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n\ln(x) > 0$ (car $x > 0$)

x	0	α	+∞
f '(x)	+	0	–

$\Leftrightarrow \ln(x) < \dfrac{n-2}{2n}$ (car $n > 0$) $\Leftrightarrow x < \exp\left(\dfrac{n-2}{2n}\right)$ On note $\alpha = \exp\left(\dfrac{n-2}{2n}\right)$

3° $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

4° $f_n(\alpha) = \dfrac{1 + n \times \frac{n-2}{2n}}{\left(\exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)\right)^2} = \dfrac{n}{2}\exp\left(\dfrac{2-n}{n}\right)$

x	0	α	+∞
signe de f '	+	0	–
f	– ∞ ↗	$f_n(\alpha)$	↘ 0

2° a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1 + (n+1)\ln(x)}{x^2} - \dfrac{1 + n\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 + n\ln(x) + \ln(x) - 1 - n\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ indépendant de n.

La fonction $f_{n+1} - f_n$ est donc indépendant de n.

b) $f_3(x) - f_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_n(x) - f_2(x) = (n-2) \times (f_3(x) - f_2(x))$

Soit x une réel > 0. On note M_2 le point d'abscisse x de ($\mathscr{C}_2$) et M_3 le point d'abscisse x de ($\mathscr{C}_3$)

M_n est le le point d'abscisse x de ($\mathscr{C}_n$) tel que : $\overrightarrow{M_2M_n} = (n-2)\,\overrightarrow{M_2M_3}$

On translate le point M_2 avec la translation de vecteur $(n-2)\,\overrightarrow{M_2M_3}$.

PARTIE B 1° $I = \left[-\dfrac{1}{x} \times \ln(x)\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e -\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x}\,dx = -\dfrac{1}{e} + \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^e = -\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e} + 1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

2° $\forall x \in [1\,;e]$, $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$ donc en UA $\mathscr{A} = I = 1 - \dfrac{2}{e}$

3° $\forall x \in [1\,;e]$, $\dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^2} \geq 0$ donc en UA on a :

$A_2 = \displaystyle\int_1^e \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^e \dfrac{1}{x^2}\,dx + 2I = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^e + 2I = -\dfrac{1}{e} + 1 + 2\left(1 - \dfrac{2}{e}\right) = 3 - \dfrac{5}{e}$

b) pour tout entier n supérieur ou égale à 2 f_n est positive sur [1 ; e]

$A_{n+1} = \displaystyle\int_1^e \dfrac{1 + (n+1)\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^e \dfrac{1 + n\ln(x)}{x^2}\,dx + \int_1^e \dfrac{\ln(x)}{x^2}\,dx = A_n + I$

La suite (A_n) est arithmétique de raison I. I est en UA l'air de la portion du plan limité par les courbes ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) et les droites d'équations x = 1 et x = e