Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur [0 ; + ∞ [par :

$$f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$$

Soit ($\mathscr{C}_k$) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Etude préliminaire

Mise en place d'une inégalité

On considère la fonction g définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

1° Etudier le sens de variation de g.

2° En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1 + a) \leq a$.

Partie A

Etude de la fonction f_1 définie sur [0 ; + ∞ [par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

1° Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.

2° Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$

En déduire la limite de f_1 en + ∞.

3° Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B

Etude et propriétés des fonctions f_k.

1° Calculer $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.

2° Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\,\dfrac{x}{e^x}\right)$

En déduire la limite de f_k en + ∞.

3° a) Dresser le tableau de variation de f_k.

b) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; + ∞ [, on a : $f_k(x) \leq \dfrac{k}{e}$

4° Déterminer une équation de la tangente (T_k) à ($\mathscr{C}_k$) au point O.

5° Soit p et m deux réels strictement positifs tels que p < m. Etudier la position relative de ($\mathscr{C}_p$) et ($\mathscr{C}_m$).

6° Tracer les courbes ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

Partie C

Majoration d'une intégrale

Soit λ un réel strictement positif, on note A(λ) l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathscr{C}_k$) et les droites d'équations x = 0 et x = λ.

1° Sans calculer A(λ), montrer que $A(\lambda) \leq k \int_0^{\lambda} x\,e^{-x}\,dx$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

2° Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$\int_0^{\lambda} x\,e^{-x}\,dx$$

3° On admet que A(λ) admet une limite en + ∞. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) \leq k$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

CORRECTION

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur [0 ; + ∞ [par : $f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x$. Soit ($\mathscr{C}_k$) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). Etude préliminaire Mise en place d'une inégalité

On considère la fonction g définie sur [0 ; + ∞ [par $g(x) = \ln(1 + x) - x$. 1° Etudier le sens de variation de g.

$x \longmapsto \ln(1 + x)$ est la composée de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞[.

g est la somme de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} \leq 0 \text{ sur } [\,0\,;+\infty\,[$$

x	–0 +∞
signe de g '	
g	0 ↘

2° En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, ln (1 + a) ≤ a.

g est décroissante sur [0 ; + ∞ [et g(0) = 0 donc pour tout réel x de [0 ; + ∞ [, g(x) ≤ 0

Pour tout réel a positif ou nul on sait que g(a) ≤ 0 donc ln (1 + a) ≤ a.

Partie A Etude de la fonction f_1 définie sur [0 ; + ∞ [par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

1° Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.

La fonction $x \longmapsto \ln(e^x + x)$ est de la forme ln u où u est une fonction dérivable sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [et sa dérivée est de la forme $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{e^x + 1}{e^x + x}$

f_1 est la somme de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [et on a :

$$f_1'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{e^x + 1 - e^x - x}{e^x + x} = \frac{1-x}{e^x+x}$$

Pour tout réel x de [0 ; + ∞ [$e^x + x \geq 0$ donc $f_1'(x)$ est du signe de 1 – x.

f_1 est donc croissante sur [0 , 1] et décroissante sur [1 ; + ∞ [

2° Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$ En déduire la limite de f_1 en + ∞.

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x = \ln(e^x + x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x + x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) = \lim_{X\to 1} \ln X = 0.$$

3° Dresser le tableau de variation de f_1.

$f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{e}\right)$

x	0		1		+∞
signe de f_1		+	0	–	
f_1	0	↗	$f_1(1)$	↘	0

Partie B Etude et propriétés des fonctions f_k.

1° Calculer $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.

Pour tout réel x de [0 ; + ∞ [, $e^x + k\,x > 0$ car k >0.

La fonction $x \longmapsto \ln(e^x + k\,x)$ est de la forme ln u où u est une fonction dérivable sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [et sa dérivée est de la forme $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{e^x + k}{e^x + k\,x}$

f_k est la somme de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [et on a :

$$f_k'(x) = \frac{e^x + k}{e^x + k\,x} - 1 = \frac{e^x + k - e^x - k\,x}{e^x + k\,x} = \frac{k - k\,x}{e^x + k\,x}.$$

f_k' est donc du signe de k – k x = k (1 – x) c'est à dire du signe de 1 – x.

f_k est donc croissante sur [0 , 1] et décroissante sur [1 ; + ∞ [

2° Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [, $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$ En déduire la limite de f_k en + ∞.

$$f_k(x) = \ln(e^x + k\,x) - x = \ln(e^x + k\,x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x + k\,x}{e^x}\right) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + k\dfrac{x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right) = \lim_{X\to 1} \ln X = 0.$$

3° a) Dresser le tableau de variation de f_k.

x	0		1		$+\infty$
signe de f_k'		+	0	−	
f_k	0	$\nearrow$	$f_k(1)$	$\searrow$	0

b) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; + ∞ [, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

D'après les variations de f_k on put dire que $f_k(1)$ est le maximum de la fonction f_k sur [0 ; + ∞ [

$f_k(1) = \ln\left(1 + k\frac{1}{e}\right) = \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right)$

On a vu que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1 + a) \leq a$.

En posant $a = \frac{k}{e}$ on obtient : $\ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) \leq \frac{k}{e}$

On peut conclure que pour tout réel x de [0 ; + ∞ [: $f_k(x) \leq f_1(1) \leq \frac{k}{e}$

4° Déterminer une équation de la tangente (T_k) à ($\mathscr{C}_k$) au point O.

$f_k(0) = 0$ et $f_k'(0) = k$ donc l'équation de (T_k) est : $y = 0 + k(x - 0)$ c'est à dire $y = k\,x$.

5° Soit p et m deux réels strictement positifs tels que p < m. Etudier la position relative de ($\mathscr{C}_p$) et ($\mathscr{C}_m$).

Pour étudier la position relative de ($\mathscr{C}_p$) et ($\mathscr{C}_m$), il faut étudier le signe de $f_p(x) - f_m(x)$.

$f_p(x) - f_m(x) = \ln(e^x + p\,x) - x - \ln(e^x + m\,x) + x = \ln\left(\frac{e^x + p\,x}{e^x + m\,x}\right)$

x > 0.

$f_p(x) - f_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x + p\,x}{e^x + m\,x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + p\,x}{e^x + m\,x} \geq 1 \Leftrightarrow e^x + p\,x \geq e^x + m\,x$ (car $e^x + m\,x > 0$)

$\Leftrightarrow p\,x \geq m\,x \Leftrightarrow p \geq m$ (car x >0)

Si $m \leq p$ alors ($\mathscr{C}_m$) est au dessous de ($\mathscr{C}_p$)

6° Tracer les courbes ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

Partie C Majoration d'une intégrale Soit λ un réel strictement positif, on note A(λ) l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathscr{C}_k$) et les droites d'équations x = 0 et x = λ.

1° Sans calculer A(λ), montrer que $A(\lambda) \leq k\int_0^\lambda x\,e^{-x}\,dx$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

($\mathscr{C}_k$) est au dessus de l'axe des abscisse donc $A'(\lambda) = \int_0^\lambda f_k(x)\,dx$

$f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right) \leq k\frac{x}{e^x}$

$\forall\, x \in [\,0\,,\lambda\,],\ f_k(x) \leq k\,x\,e^{-x}$

On peut donc intégrer l'inégalité sur [0 , λ] et on obtient :

$\int_0^\lambda f_k(x)\,dx \leq \int_0^\lambda k\,x\,e^{-x}\,dx$ donc $A(\lambda) \leq k\int_0^\lambda x\,e^{-x}\,dx$

2° Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^\lambda x\,e^{-x}\,dx$

$\left.\begin{array}{r} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = -e^{-x} \end{array}\right\}$ Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie.

$\int_0^\lambda x\,e^{-x}\,dx = [x \times (-e^{-x})]_0^\lambda - \int_0^\lambda 1 \times (-e^{-x})\,dx = -\lambda\,e^{-\lambda} - 0 + \int_0^\lambda e^{-x}\,dx = -\lambda\,e^{-\lambda} + [-e^{-x}]_0^\lambda = -\lambda\,e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$

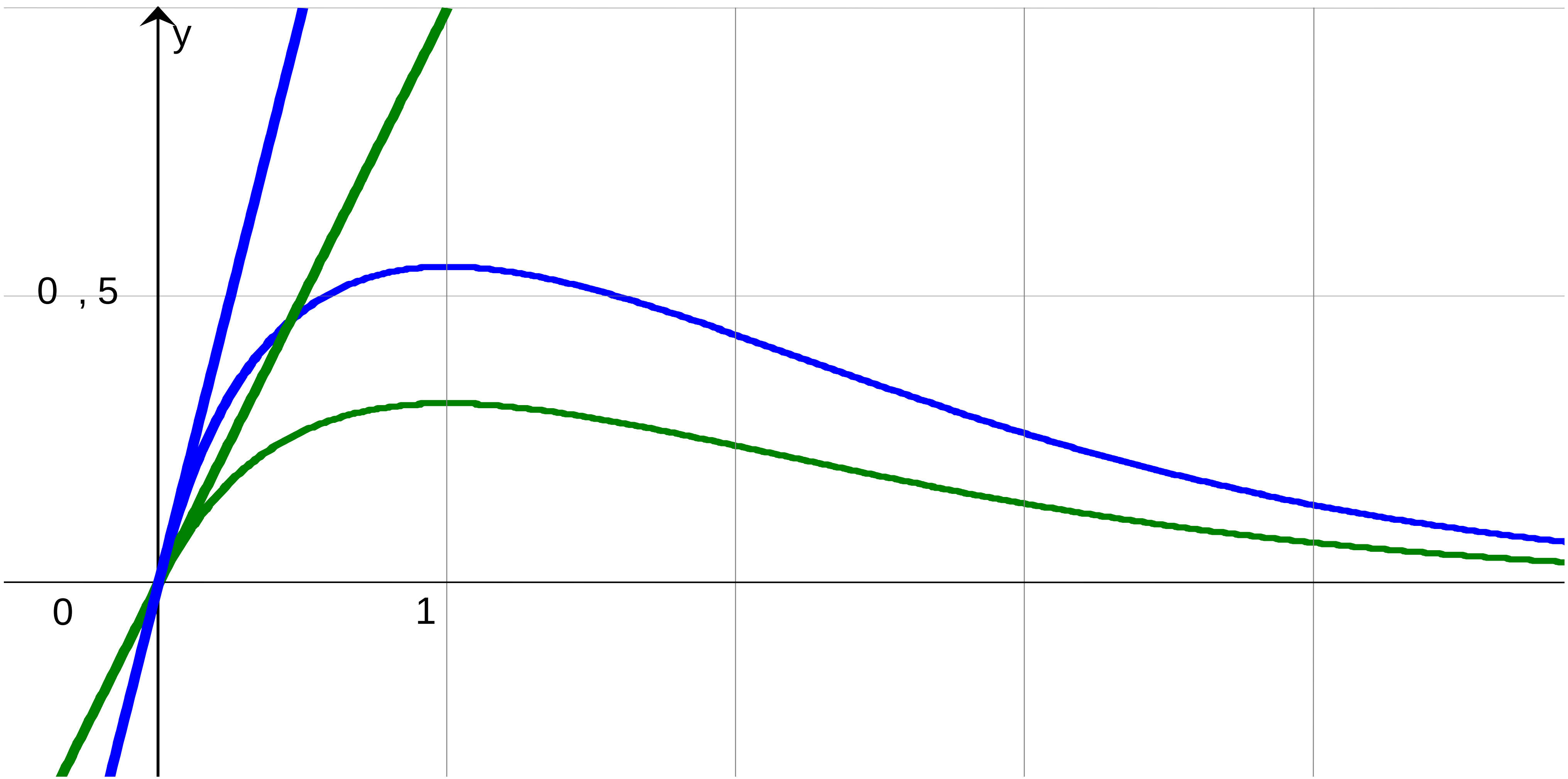
$\int_0^\lambda x\,e^{-x}\,dx = 1 - \lambda\,e^{-\lambda} - e^{-\lambda}$

3° On admet que A(λ) admet une limite en + ∞. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) \leq k$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Pour tout λ réel positif on a : $A(\lambda) \leq k(1 - \lambda\,e^{-\lambda} - e^{-\lambda}) \leq k$.

On obtient donc bien, par comparaison de limite , $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) \leq k$

L'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe ($\mathscr{C}_k$) et l'axe des ordonnées est donc majorée par k.


y
0 , 5
0
1