EXERCICE 3 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1° a) Etudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2° a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

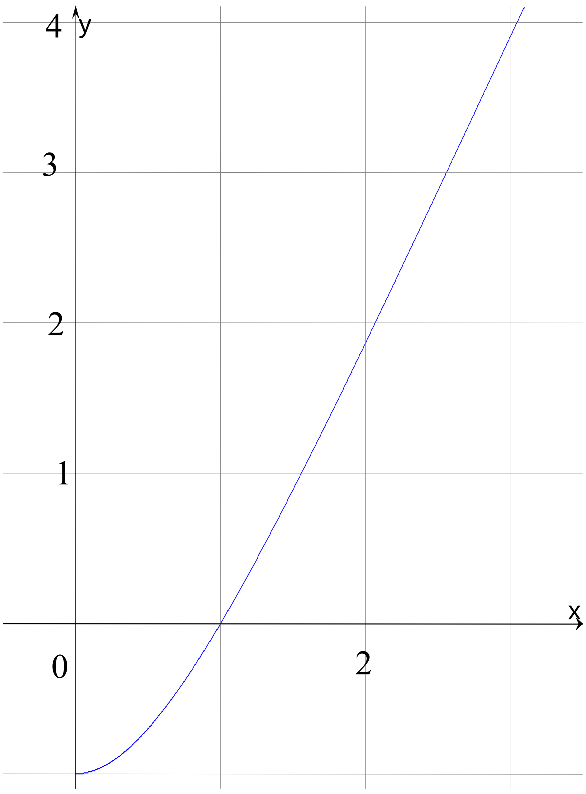
b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3° A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4° a) Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



CORRECTION

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm). 1° a) Etudier la limite de f en + ∞ .

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - e^{-x} = 2\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

b) Montrer que la droite Δ d'équation y = 2 x − 2 est asymptote à $\mathscr{C}$.

$f(x) - (2x - 2) = (x - 1)(2 - e^{-x}) - 2x + 2 = 2x - 2 - x e^{-x} + e^{-x} - 2x + 2 = - x e^{-x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 2) = 0$. Δ est bien asymptote à $\mathscr{C}$ en + ∞ .

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

$f(x) - (2x - 2) = e^{-x}(1 - x)$.

x	– ∞	1	+ ∞
1 – x	+	0	–
$e^{-x}(1 - x)$.	+	0	–
	$\mathscr{C}$ au dessus de Δ		$\mathscr{C}$ au dessous de Δ

2° a) Calculer f '(x) et montrer que $f'(x) = x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

$f'(x) = 1 \times (2 - e^{-x}) + (x - 1) e^{-x} = 2 - e^{-x} + x e^{-x} - e^{-x}$

$= x e^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, f '(x) > 0.

$$\left.\begin{array}{r} x e^{-x} > 0 \\ 2(1 - e^{-x}) > 0\end{array}\right\} \text{donc } x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) > 0$$

c) Préciser la valeur de f '(0), puis établir le tableau de variations de f.

$f'(0) = 0 \times e^{0} + 2(1 - e^{0}) = 0$.

x	0	+∞
signe de f '	0	+
f	– 1 ↗	+ ∞

3° A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

Sur [1 , 4] $\mathscr{C}$ est au dessous de Δ

l'unité graphique est de 2 cm donc l'aire cherché est égale à :

$\int_1^4 2(x - 2 - f(x))\,dx \times 4$.

$\mathscr{A} = 4 \times \int_1^4 -e^{-x} + x e^{-x}\,dx = -4 \times \int_1^4 e^{-x}\,dx + 4 \times \int_1^4 x e^{-x}\,dx$

On calcule $\int_1^4 x e^{-x}\,dx$ à l'aide d'une intégration par partie.

$$\left.\begin{array}{r} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \text{ et } v(x) = -e^{-x}\end{array}\right\} \text{Les fonctions u et v sont dérivable et leur dérivées sont continues donc :}$$

$\int_1^4 x e^{-x}\,dx = [-x e^{-x}]_1^4 - \int_1^4 (-e^{-x})\,dx = -4 e^{-4} + e^{-1} - [e^{-x}]_1^4$

$= -4 e^{-4} + e^{-1} - e^{-4} + e^{-1} = -5 e^{-4} + 2 e^{-1}$

$\mathscr{A} = 4 \times [e^{-x}]_1^4 + 4 \times (-5 e^{-4} + 2 e^{-1}) = 4 e^{-4} - 4 e^{-1} - 20 e^{-4} + 8 e^{-1} = -16 e^{-4} + 4 e^{-1}$

4° a) Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

La tangente en A à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ si et seulement si f '(a) = 2

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow x e^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow e^{-x}(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$f(2) = 2 - e^{-2}$ et $A\,(2 , 2 - e^{-2})$

b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Remarque : on peut utiliser directement la formule du cours : $d(A, \Delta) = \dfrac{|a\,x_A + b\,y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

où l'équation de Δ est : $a\,x + b\,y + c = 0$ ou bien la retrouver.

Equation de Δ : $2\,x - y - 2 = 0$. Soit H le projeté orthogonal de A sur Δ.

$\overrightarrow{AH} = k\,\vec{n}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Δ.

$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = k\,\|\vec{n}\|^2$ et $AH = |k| \times \|\vec{n}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

$H \in \Delta$ donc $2\,x_H - y_H = 2$ et donc $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = |2\,(x_H - x_A) - (y_H - y_A)| = |2 - 2\,x_A + y_A| = |2\,x_A - y_A - 2|$

et donc $d(A, \Delta) = AH = \dfrac{|2\,x_A - y_A - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{|2 \times 2 - 2 + e^{-2} - 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{e^{-2}\sqrt{5}}{5}$. on a donc $AH \approx 0{,}12$ cm

Variante plus "analytique"

Le projeté orthogonal de A sur Δ a ses coordonnées qui vérifient :

$\begin{cases} 2\,x - y - 2 = 0 \text{ car } H \in \Delta \\ 2\,(y - y_A) - (-1)\,(x - x_A) = 0 \text{ car } \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \end{cases}$

$\begin{cases} 2\,x - y - 2 = 0 \\ 2\,(y - (2 - e^{-2})) + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - y - 2 = 0 \\ x + 2\,y - 6 - 2\,e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\,x - 2 \\ x + 4\,x - 4 - 6 - 2\,e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\,e^{-2}/5 \\ y = 2 - 4\,e^{-2}/5 \end{cases}$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2 - 2\,e^{-2}/5 - 2 \\ 2 - 4\,e^{-2}/5 - 2 + e^{-2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -2\,e^{-2}/5 \\ e^{-2}/5 \end{pmatrix}$ et $AH = \sqrt{4 + 1} \times \dfrac{e^{-2}}{5} = \dfrac{e^{-2}\sqrt{5}}{5}$