AMERIQUE DU SUD, 1992 Fonctions logarithmes ; Intégrales ; Suite

A tout entier naturel $n \geq 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n\,!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_n$ en la courbe représentative de fn dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur x'x et 10 crosury'y.)

La partie A propose l'étude de f_1. Dans les parties B et C on précise certains comportements des fonctions f_n et de primitives de ces fonctions.

Partie A - Etude de f_1

1° Déterminer la limite de f en $+\infty$. Etudier les variations de f_1.

2° Tracer la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

3° A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour x élément de I :

$$I_1(x)= \int_1^x f_1(t)\,dt.$$

Partie B - Comportement des fonctions f_n pour $n \geq 1$

1° En remarquant que $\frac{(\ln n)^n}{x^2} = \left(\frac{(\ln x)}{x^{2/n}}\right)^n$, déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

2° a) Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{n/2}) = 0$.

Donner le tableau de variation de f_n.

b) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est : $y_n = \frac{1}{n\,!}\left(\frac{n}{2\,e}\right)^n$

3° a) Soit $x \in I$. Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

b) Déterminer la tangente à C_2 au point d'abscisse 1.

Préciser les positions relatives de C_1 et C_2.

Tracer $\mathscr{C}_2$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

4° On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n \geq 1}$.

Soit n un entier strictement positif.

a) Calculer, pour $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$

c) En déduire que $y_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}$.

Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$?

Partie C - Etude de primitives de f_n sur I

A tout entier $n \geq 1$ et à tout nombre réel x de I, on associe l'intégrale : $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$.

1° a) Soit $k \geq 1$ un entier.

Grâce à une intégration par parties démontrer la relation : $I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)\,!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2\,!\;x} - \ldots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)\,!\;x} - \frac{(\ln x)^n}{n\,!\;x}$$

2° Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.
a) Montrer que $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\, y_n$, (y_n a été défini dans B.2° b))
b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha)$. (On utilisera B.4° c))

3° Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose : $W_n(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{1\,!} + \dfrac{(\ln x)^2}{2\,!} + \ldots + \dfrac{(\ln x)^n}{n\,!}$

a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
b) $\alpha \geq 1$ étant un nombre réel fixé, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n(\alpha)$.
c) En déduire la limite γ de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de terme général :
$U_n = 1 + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{2\,!} + \ldots + \dfrac{1}{n\,!}$.
En s'aidant de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée de U_6 à 10^{-4} près.
Comparer cette valeur à γ .

CORRECTION

A tout entier naturel n ≥ 1 on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle I = [1 ; + ∞ [par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$ On note $\mathscr{C}_n$ en la courbe représentative de fn dans un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur x'x et 10 crosury'y.) La partie A propose l'étude de f_1. Dans les parties B et C on précise certains comportements des fonctions f_n et de primitives de ces fonctions. **Partie A** **- Etude de f_1 1° Déterminer la limite de f en + ∞ . Etudier les variations de f_1.**

$$f_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{(\ln x)^1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

On sait, d'après les théorème des croissances comparrées, que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

f_1 est le quotient de deux fonctions dérivables sur I, elle est définie sur I elle est donc dérivable sur I

$$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

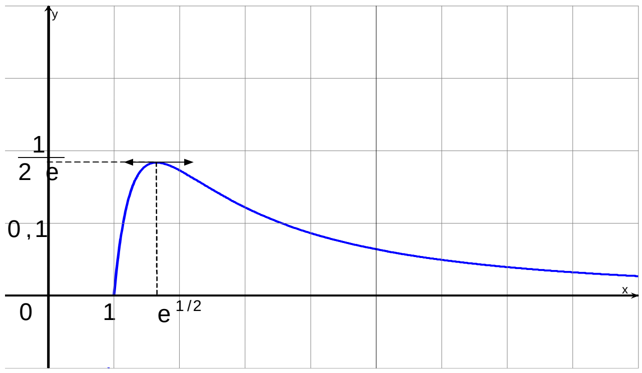
Sur I, la fonction $f_1'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$

$$1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2\ln x \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{1/2}$$

x	1	$e^{1/2}$	$+\infty$
signe de f_1'	+	0	−
f_1	0 ↗	$\frac{1}{2e}$	↘ 0

$$f_1(e^{1/2}) = \frac{1}{2e}$$

2° Tracer la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.



3° A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour x élément de I :$I_1(x)= \int_1^x f_1(t)\,dt$.

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = \ln t \text{ et } u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \text{ et } v(x) = -\frac{1}{t} \end{array}\right\}$$

Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u ' et v ' sont continues sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie.

$$I_1(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{t}\,dt = -\frac{\ln x}{x} + 0 + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

Partie B **- Comportement des fonctions f_n pour n ≥ 1 1° En remarquant que $\frac{(\ln n)^n}{x^2} = \left(\frac{(\ln x)}{x^{2/n}}\right)^n$, déterminer la limite de f_n en + ∞ .**

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$. en posant $\alpha = \frac{n}{2}$ on peut dire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{2/n}} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(\ln x)}{x^{2/n}}\right)^n = 0$

2° a) Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{n/2}) = 0$. Donner le tableau de variation de f_n.

f_n est la quotient de deux fonctions dérivables sur I, elle est définie sur i elle est donc dérivable sur I.

$$f_n'(x) = \frac{n(\ln x)^{n-1}\times\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(\ln x)^n}{x^4} = \frac{n(\ln x)^{n-1}\times x - 2x\times(\ln x)^n}{x^4} = \frac{(\ln x)^{n-1}(n - 2\ln x)}{x^3}$$

Pour tout réel x de I ln x > et $x^3 > 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n - 2\ln x$

x	1	$e^{n/2}$	$+\infty$
signe de f_n'	+	0	–
f_n	0 ↗	$f_n(e^{n/2})$	↘ 0

$n - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} \geq x \Leftrightarrow x \leq e^{n/2}$

b) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est : $y_n = \dfrac{1}{n\,!}\left(\dfrac{n}{2\,e}\right)^n$

$$f_n(e^{1/2}) = \frac{1}{n\,!}\,\frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{1}{n\,!}\,\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n} = \frac{1}{n\,!}\left(\frac{n}{2\,e}\right)^n$$

3° a) Soit $x \in$ I . Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{2\,!} \times \frac{(\ln x)^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}\left(\frac{\ln x}{2} - 1\right)$$

$$f_2(x) - f_1(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$$

x	1	e^2	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	–	0	+

b) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 1. Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.Tracer $\mathscr{C}_2$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$f_2(1) = \dfrac{(\ln 1)^2}{1^2} \times \dfrac{1}{2} = 0$ et $f_1'(1) = \dfrac{(\ln 1)^{2-1}(2 - 2\ln 1)}{x^3} = 0$ L'équation de la tangente est donc y = 0.

4° On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n \geq 1}$. Soit n un entier strictement positif. a) Calculer, pour x > 1 , $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{(n+1)\,!} \times \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} \times (n\,!) \times \frac{x^2}{(\ln x)^n} = \frac{\ln x}{n+1}$$

b) Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$

$$y_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,!}\left(\frac{n+1}{2\,e}\right)^{n+1} = \frac{1}{n\,!} \times \frac{1}{2\,e}\left(\frac{n+1}{2\,e}\right)^n$$

$$f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{1}{n\,!} \times \frac{\left(\ln\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)\right)^n}{\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{n\,!} \times \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e^{n+1}} = 2\,y_{n+1}$$

$e^{\frac{n+1}{2}} \geq e^{\frac{n}{2}}$ donc $f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leq f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$ car la fonction f_n est décroissante sur $[\, e^{n/2} , +\infty\, [$

donc $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leq \dfrac{1}{2} y_n$ car $f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = y_n$

c) En déduire que $y_n \leq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^n}$. Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$?

Par récurrence . $y_n \leq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^n}$

Initialisation : $y_1 = \dfrac{1}{2\,e} \leq \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{2^1}$. donc la propriété est est vraie pour n = 1.

Hérédité : Soit un entier $k \geq 1$ tel que $y_k \leq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^k}$

$y_{k+1} \leq \dfrac{1}{2} y_k \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{2^k}$. On a donc bien $y_{k+1} \leq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^{k+1}}$

Conclusion :

La propriété $y_n \leq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^n}$ est vraie pour n = 1 et elle est héréditaire d'après l'axiome de récurrence on peut donc dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^n} = 0$ donc d'après les théorèmes de comparaison de limites on peut dire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$

Partie C - Etude de primitives de f_n sur I A tout entier $n \geq 1$ et à tout nombre réel x de I, on associe l'intégrale : $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$.

1° a) Soit $k \geq 1$ un entier. Grâce à une intégration par parties démontrer la relation : $I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = \frac{(\ln t)^{k+1}}{(k+1)!} \text{ et } u'(t) = \frac{(k+1)(\ln t)^k}{(k+1)!}\times\frac{1}{t} = \frac{(\ln t)^k}{k!}\times\frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \text{ et } v(t) = -\frac{1}{t} \end{array}\right\}$$

Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle d'intégration on peut donc intégrer par partie.

$$I_{k+1} = \left[-\frac{1}{t}\times\frac{(\ln t)^{k+1}}{(k+1)!}\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{(\ln t)^k}{k!}\times\frac{1}{t}\right)\times\left(-\frac{1}{t}\right)dt = -\frac{1}{x}\frac{(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{1}\frac{(\ln 1)^{k+1}}{(k+1)!} + \int_1^x \frac{1}{k!}\frac{(\ln t)^k}{x^2}\,dt$$

On a donc bien $I_{k+1} = I_k - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!\,x} - \dots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!\,x} - \frac{(\ln x)^n}{n!\,x}$

On démonstration le résultat par récurrence

Initialisation On a démontré que : $I_1(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ donc la propriété est est vraie pour n = 1.

Hérédité : Soit un entier $k \geq 1$ tel que $I_k(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!\,x} - \dots - \frac{(\ln x)^{k-1}}{(k-1)!\,x} - \frac{(\ln x)^k}{k!\,x}$

$$I_{k+1} = I_k - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!\,x} - \dots - \frac{(\ln x)^{k-1}}{(k-1)!\,x} - \frac{(\ln x)^k}{k!\,x} - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

La propriété est donc vraie au rang k + 1.

Conclusion : La propriété est vraie pour n = 1 et elle est héréditaire d'après l'axiome de récurrence on peut donc dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1

2° Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé. a) Montrer que $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\,y_n$, ($y_n$ a été défini dans B.2° b))

Pour tout réel t de [1 , α], $0 \leq f_n(t) \leq y_n$ On peut intégrer les inégalité (ou utiliser l'inégalité de la moyenne)

On obtient : $0 \times (\alpha - 1) \leq \int_{0,\alpha} f_n(t)\,dt \leq (\alpha - 1)\,y_n$ donc $0 \leq I_n(\alpha) \leq (1 - \alpha)\,y_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$. (On utilisera B.4° c))

On a vu au B 4° a) que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha - 1)\,y_n = 0$

D'après le théorème des gendarmes on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$

3° Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose : $W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}$ a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!\,x} - \dots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!\,x} - \frac{(\ln x)^n}{n!\,x} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln x)^n}{n!}\right) = 1 - \frac{1}{x}W_n(x)$$

donc $\frac{1}{x}W_n(x) = 1 - I_n(x)$ donc $W_n(x) = x\,(1 - I_n(x))$

b) $\alpha \geq 1$ étant un nombre réel fixé, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$.

On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\,(1 - I_n(\alpha)) = \alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$

c) En déduire la limite γ de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de terme général : $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$. En s'aidant de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée de U_6 à 10^{-4} près. Comparer cette valeur à γ .

$U_n = W_n(e)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n(e) = e = \gamma$

$U_6 \approx 2{,}7181$ et $\gamma \approx 2{,}7183$.