Partie A: Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : (E) $y' - 3y = \dfrac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$.

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x}\,\varphi(x)$.

1° Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.

2° Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \dfrac{e}{2}$.

Partie B: Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1° Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.

2° Tracer $\mathscr{C}$.

3° Pour α réel non nul, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx$.

a) Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.

b) Exprimer $I\alpha$ en fonction de α.

c) Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C: Etude d'une suite

On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (U_n) par : $U_n = \int_0^1 f(x)\,e^{\frac{x}{n}}\,dx$ où f est la fonction définie dans la partie B.

On ne cherchera pas à calculer U_n.

1° a) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, le signe de U_n.

b) Donner le sens de variation de la suite (U_n).

c) La suite (U_n) est-elle convergente ?

CORRECTION

Partie A : 1° les fonctions : $x \longmapsto e^{-3x}$ et $x \longmapsto \varphi(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc leur produit est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = e^{-3x} \times \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = e^{3x} f(x)$
$\varphi'(x) - 3\,\varphi(x) = 3\,e^{3x} f(x) + e^{3x} f'(x) - 3\,e^{3x} f(x) = e^{3x} f'(x)$.
2° φ solution de l'équation différentielle $y' - 3y = \dfrac{-3\,e}{(1+e^{-3x})^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) - 3\,\varphi(x) = \dfrac{-3\,e}{(1+e^{-3x})^2}$

$\varphi'(x) - 3\,\varphi(x) = \dfrac{-3\,e}{(1+e^{-3x})^2} \Leftrightarrow e^{3x} f'(x) = \dfrac{-3\,e}{(1+e^{-3x})^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-3\,e \times e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

On pose $u(x) = 1 + e^{-3x}$ et on a alors : $u'(x) = -3\,e^{-3x}$ et $f'(x) = e \times \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ et donc f est une primitive de la fonction : $x \longmapsto e \times \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$. f est donc de la forme : $f(x) = e \times \left(-\dfrac{1}{u(x)}\right) + k = -\dfrac{e}{1+e^{-3x}} + k$

De plus $\varphi(0) = \dfrac{e}{2} \Leftrightarrow e^{3\times 0} \times f(0) = \dfrac{e}{2} \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{e}{2}$.

On calcule k : $-\dfrac{e}{1+e^{-3*0}} + k = \dfrac{e}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{e}{2} + k = \dfrac{e}{2} \Leftrightarrow k = e$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\dfrac{e}{1+e^{-3x}} + e = \dfrac{-e + e + e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$

Et φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^{3x} \times \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = \dfrac{e}{1+e^{-3x}}$

Partie B.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de f '	$-$
f	e ↘ 0

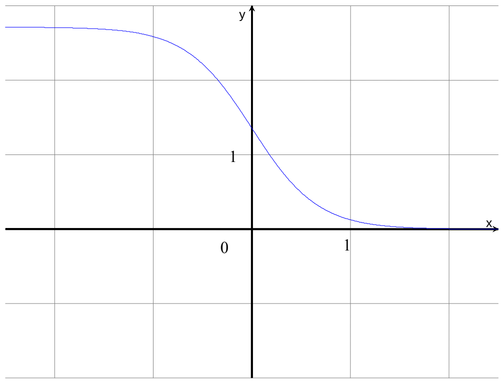
1° $f(x) = \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = \dfrac{e^{3x} \times e^{1-3x}}{e^{3x} \times (1+e^{-3x})} = \dfrac{e}{e^{3x}+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{e}{0+1} = e$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-3x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{0}{1+0} = 0$.

$f'(x) = \dfrac{-3\,e \times e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ (partie A)

2°



3° $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}\,dx$

a) Si $\alpha > 0$
$\forall x \in [0\,;\alpha],\ f(x) > 0$. Donc I_α représente, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation "x = 0" et "x = α" et I_α est positif.
Si $\alpha > 0$ alors $I_\alpha = -\int_\alpha^0 f(x)\,dx$
$\forall x \in [\alpha\,;0],\ f(x) > 0$.
Donc $\int_\alpha^0 f(x)\,dx = -I_\alpha$ représente, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation "x = 0" et "x = α" et I_α est négatif..

b) $f(x) = \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}} = e \times \dfrac{e^{-3x}}{1+e^{-3x}}$
On pose $u(x) = 1 + e^{-3x}$ et alors $u'(x) = -3\,e^{-3x}$.
$f(x) = \dfrac{e}{-3} \times \dfrac{-3\,e^{-3x}}{1+e^{-3x}} = -\dfrac{e}{3} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. une primitive de f est de la forme : $x \longmapsto -\dfrac{e}{3}\ln(|1+e^{-3x}|)$

$I_\alpha = \left[-\dfrac{e}{3}\ln(1+e^{-3x})\right]_0^\alpha = -\dfrac{e}{3}\ln(1+e^{-3\alpha}) + \dfrac{e}{3}\ln 2 = \dfrac{e}{3} \times \ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3\alpha}}\right)$

c) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-3\alpha} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{2}{1+e^{-3\alpha}} = \dfrac{2}{1+0} = 2$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \dfrac{e}{3} \times \ln 2$.

Partie C 1° a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu que pour tout réel x, $f(x) \geq 0$

$\forall x \in [0, 1], f(x) \times e^{x/n} \geq 0$ donc $U_n \geq 0$.

b) $\forall x \in [0, 1], \frac{x}{n} \geq \frac{x}{n+1}$ donc $\exp\left(\frac{x}{n}\right) \geq \exp\left(\frac{x}{n+1}\right)$ donc $f(x) \times \exp\left(\frac{x}{n}\right) \geq f(x) \times \exp\left(\frac{x}{n+1}\right)$

On intègre les inégalités sur [0 , 1] et on obtient : $U_n \geq U_{n+1}$. La suite (U_n) est donc décroissante.

c) La suite (U_n) est décroissante et elle est minorée par 0 elle est donc convergente et sa limite est positive.

2° $\forall x \in [0, 1], e^0 \leq e^{x/n} \leq e^{1/n}$ donc $f(x) \leq f(x) \times e^{x/n} \leq f(x) \times e^{1/n}$

On intègre les inégalités sur [0 , 1] et on obtient : $\int_0^1 f(x)\,dx \leq U_n \leq e^{1/n} \int_0^1 f(x)\,dx$ c'est à dire $I_1 \leq U_n \leq e^{1/n} I_1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1/n} = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1/n} I_1 = I_1$.

D'après le théorème des gendarmes la suite (U_n) converge vers I_1.