Centres étrangers 1997

On dispose de deux urnes U1 et U2 contenant des boules indiscernables au toucher

U1 contient n boules blanches et 3 boules noires (entier superieur ou egal a 1).

U2 contient 2 boules blanches et une boule noire

On tire au hasard une boule de U1 et on la met dans U2 puis on tire au hasard une boule de U2 et on la met dans U1 ceci constitue une épreuve.

1° On considère l'événement A "après l'epreuve les urnes se retrouvent dans leur configuration de depart".

a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrir : $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

b) Determiner la limite de p(A) quand n tend vers + infini

2° On considère l'événement B " apres l'epreuve l'urne U2 contient une seule boule blanche".

vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrir : $p(B) = \frac{6}{4\,(n+3)}$

3° Un joueur mise 20 € et effectue une epreuve. A l'issue de vette epreuve on compte les boules blanches contenues dans U2.

si U2 contient 1 boule blanche le joueur recoit 2n euros

si U2 contient 2 boules blanches le joueur recoit n euros

si U2 contient 3 boules blanches le joueur ne recoit rien

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun interet a jouer tant que n ne depasse pas 10.

Dans la suite n considere n >10 et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs de les gains algébrique du joueur(par exemple si apres l'epreuve l'urne U2 contient une seule boule blanche $X = 2\,n - 20$

Determiner la loi de probabilité X

Calculer l'esperance mathématiques de X

On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'esperance mathématique est strictement positive.

Montrer qu'il est ainsi dès que l'urne U1 contient au moins 25 boules blanches

CORRECTION

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (entier superieur ou egal a 1). U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ceci constitue une epreuve. 1° On considère l'événement A "après l'epreuve les urnes se retrouvent dans leur configuration de depart".

a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrir : $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

b) Determiner la limite de p(A) quand n tend vers + infini

Tirage dans U_1		Tirage dans U_2		Configuration finale de U_1	Configuration finale de U_2
$\frac{n}{n+3}$	B	$\frac{1}{4}$	N	n – 1 blanches et 4 noires	3 blanches
		$\frac{3}{4}$	B	n blanches et 3 noires	2 blanches une noire
$\frac{3}{n+3}$	N	$\frac{1}{2}$	N	n blanches et 3 noires	2 blanches une noire
		$\frac{1}{2}$	B	n + 1 blanches et 2 noires	1 blanche et 2 noires

$$p(A) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3\,n+6}{4\,(n+3)} = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4} \times \frac{n}{n} = \frac{3}{4}$$

2° On considère l'événement B " apres l'epreuve l'urne U2 contient une seule boule blanche". vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrir : $p(B) = \frac{6}{4\,(n+3)}$

$$p(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{4\,(n+3)}$$

3° Un joueur mise 20 € et effectue une epreuve. A l'issue de vette epreuve on compte les boules blanches contenues dans U2. si U2 contient 1 boule blanche le joueur recoit 2n euros si U2 contient 2 boules blanches le joueur recoit n euros si U2 contient 3 boules blanches le joueur ne recoit rien a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun interet a jouer tant que n ne depasse pas 10.

La mise est de 20 € donc pour ne pas perdre à tous les coups il faut que le gain maximum soit supérieur ou égale à 20 € c'est à dire $2\,n \geq 20$.

Dans la suite n considere n >10 et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs de les gains algébrique du joueur(par exemple si apres l'epreuve l'urne U2 contient une seule boule blanche X = 2 n – 20 Determiner la loi de probabilité X Calculer l'esperance mathématiques de X On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'esperance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il est ainsi dès que l'urne U1 contient au moins 25 boules blanches

$$p(X = 2\,n - 20) = p(B) = \frac{6}{4\,(n+3)}$$

$$p(X = n - 20) = p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

$$p(X = -20) = 1 - \frac{6}{4\,(n+3)} - \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) = \frac{4\,n + 12 - 6 - 3\,n - 6}{4\,(n+3)} = \frac{n}{4\,(n+3)} = \frac{n}{n+3} \times \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \frac{6}{4\,(n+3)} \times (2\,n - 20) + \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) \times (n - 20) + \frac{n}{4\,(n+3)} \times (-20) =$$

$$\frac{12\,n - 120 + 3\,n^2 + 6\,n - 60\,n - 120 - 20\,n}{4\,(n+3)} = \frac{3\,n^2 - 62\,n - 240}{4\,(n+3)}$$

$\Delta = 62^2 - 4 \times 3 \times (-240) = 6724 = 82^2$ les racones de $x \longmapsto 3\,x^2 - 62\,x - 240$ sont donc :

$\frac{62 - 82}{6} = -\frac{10}{3}$ et $\frac{62 + 82}{6} = \frac{144}{6} = 24$ d'où on peut dire que : $E(X) = 3\,(n - 24)\left(n + \frac{10}{3}\right) = (n - 24)\,(3\,n + 10)$

$E(X) > 0 \Leftrightarrow n > 24 \Leftrightarrow n \geq 25$.