Baccalauréat France série S septembre 2003 _: (5 points)_

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8%de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».
a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

CORRECTION

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8%de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

Le propriétaire prélève **au hasard** et avec remise 20 pièces donc il effectue **20** tirages **indépendants**

Chaque tirage a **deux issues possibles** «la pièce a une face étrangère» ou «la pièce n'a pas une face étrangère»

la probabilité d'avoir une face étrangère est : $p = \dfrac{40}{100} = 0,4$. X, qui compte le nombre de pièces portant une face « étrangère », est donc bien une loi binomiale de paramètre 20 et 0,4.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

$p(X = 5) = \binom{20}{5} 0,4^5 \times (1 - 0,4)^{15} = 15504 \times 0.4^5 \times 0.6^{15} \approx 0,075.$

c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

On calcule la probabilité de l'événement contraire.

$p(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{20}{0} 0,4^0 \times 0,6^{20} + \binom{20}{1} 0,4^1 \times 0,6^{19} \approx 0,0005$

La probabilité cherchée est donc égale a : $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) \approx 0,9995$

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac. On prélève au hasard une pièce du sac. On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».

a. Déterminer P(S), $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.

On peut repréesenter la situation avec un tableau

	S	$\overline{S} = J$	
E	1000	600	1600
$\overline{E}$	1500	6900	8400
	2500	7500	10000

La caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs » donc la caisse du rayon journeaux contient 75 % des pièces de 1 € et celle du rayon souvenir 25 %

Soit n le nombre de pièces de 1 euro de la caisse souvenir.

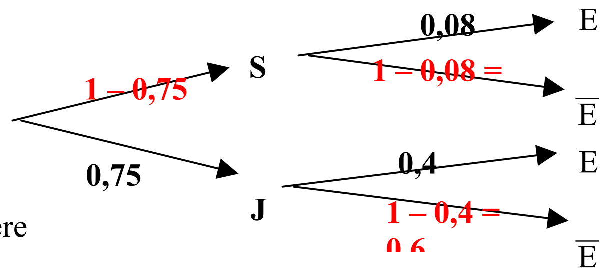
Dans la caisse journeaux il y a 3 n pièсse de 1 € et en tout il y a 4 n pièces de 1 €.

Les $\frac{3}{4}$ des pièces viennent de la caisse journeaux et on peut donc dire que sur 10 000 pièces il y a $\frac{75}{100} \times 10\,000 = 7500$ qui proviennent du rayon journeaux et $\frac{25}{100} \times 10\,000 = 2500$ proviennent du rayon souvenir

40% des pièces de 1 € du rayon « souvenirs » portent face étrangèredonc sur 2500 pièces du rayon « souvenirs» $\frac{40}{100} \times 2500 = 1\,000$ sont des pièces étrangères.

8% des pièces de 1 € du rayon «journaux» portent une face étrangère donc sur 7500 pièces du rayon «journaux» $\frac{8}{100} \times 7500 = 600$ sont des pièces étrangères.

On peut repréesenter la situation avec un arbre



On note p = p(S)

On a $p(J) = 3 \times p(S)$ et $p(J) + p(S) = 1 = 4\, p(S)$ donc $p(S) = \frac{1}{4}$

40% des pièces de 1 € du rayon « souvenirs » portent face étrangère

donc $p_S(E) = \frac{40}{100} = 0,4$

$p(S \cap E)\ p(S) \times p_S(E) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$

b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.

$p(E) = p(S \cap E) + p(\overline{S} \cap E) = \frac{1000}{10000} + \frac{600}{10000} = 0,16$

c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

$p_E(S) = \frac{p(S \cap E)}{p(E)} = \frac{0,1}{0,16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625$

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16. Le collectionneur prélève *n* pièces (*n* entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise. Calculer *n* pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

La variable aléatoire Y égale au nombre de pièces portant une face étrangère suit une loi binomiale de paramètre n et 0,16

$p(Y = 0) = (1 - 0{,}16)^n = 0{,}84^n$ et la probabilité cherchée est donc égale à : $1 - 0{,}84^n$

Il faur résoudre l'inéquation : $1 - 0{,}84^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - 0{,}9 \geq 0{,}84^n \Leftrightarrow 0{,}84^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \ln(0{,}84) \leq \ln(0{,}1)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}84)}$ car $\ln(0{,}84) >< 0$ et donc il suffit que $n \geq 14$ car $\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}84)} \approx 13{,}2$