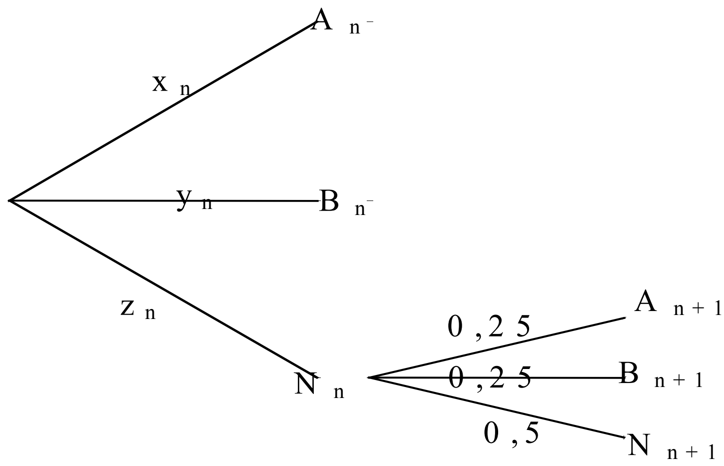
p 217 n° 121

1° a) $x_1 = \frac{1}{4}$, $y_1 = \frac{1}{4}$ et $z_1 = \frac{1}{2}$



B / A	Face	Pile
Face	N1	B1
Pile	A1	N1

b) $x_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{N_n}(A_{n+1}) \times P(N_n) = \frac{1}{4} \times z_n$

$y_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{N_n}(B_{n+1}) \times P(N_n) = \frac{1}{4} \times z_n$

$z_{n+1} = P(N_{n+1}) = P_{N_n}(N_{n+1}) \times P(N_n) = \frac{1}{2} \times z_n$

c) $z_{n+1} = \frac{1}{2} \times z_n$

La suite (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $z1 = \frac{1}{2}$ on a donc $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$x_n = \frac{1}{4} \times z_{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $y_n = \frac{1}{4} \times z_{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

2° a) Les valeurs possibles pour X sont de la forme 2^k

L'événement "$X = 2^k$ " est réalisée quand la $(k-1)^{\text{ème}}$ partie est nulle et que la $k^{\text{ème}}$ partie est gagnée apr a ou par B. c'est l'événement $A_k \cup B_k$

La valeur maximum de x est atteinte quand le jeu dure le plus longtemps possible c'est à dire quand le $19^{\text{ième}}$ partie est nulle . c'est alors 2^{20}

b) La valeur maximum de x est atteinte quand le jeu dure le plus longtemps possible c'est à dire quand le $19^{\text{ième}}$ partie est nulle(le résultat de la $20^{\text{ième}}$ partie ne change pas la donne. On a . $P(X = 2^{20}) = P(N_{19}) = z_{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

c) $P(X = 2^k) = P(A_k \cup B_k) = P(A_k) + P(B_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

Remarque : les seules valeurs prises par X sont $\{ 2^1, 2^2, 2^3, \dots , 2^{20} \}$

2^1 quand la première partie est gagnée par A ou B

2^2 la deuxième partie est gagnée par A ou B

... 2^k quand la $k^{\text{ième}}$ est gagnée par A ou B …

En utilisant la formule de la somme d'es termes d'une suite géométrique on peut vérifier que :

$$\sum_{1}^{20} P(X = 2^k) = \sum_{1}^{19} (0,5)^k + (0,5)^{19} = 0,5 \times \sum_{0}^{18} (0,5)^k + (0,5)^{19} = 0,5 \times \frac{1-(0,5)^{18+1}}{1-0,5} + (0,5)^{19} = 1.$$

d) Par définition on a : $E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \dots + P(X = x_n) \times x_n = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i$

$$E(X) = P(X = 2) \times 2 + P(X = 2^2) \times 2^2 + P(X = 2^3) \times 2^3 + \dots + P(X = 2^{19}) \times 2^{19} + P(X = 2^{20}) \times 2^{20} =$$

$$\sum_{1}^{20} P(X = 2^k) \times 2^k = \sum_{1}^{19} (0,5)^k \times 2^k + (0,5)^{19} \times 2^{20} = \sum_{1}^{19} (0,5 \times 2^k) + 2 \times (0,5 \times 2)^{19} = 19 + 2 = 21.$$