

## CENTRES ÉTRANGERS 1, 1997

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à  $\frac{1}{50}$
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à  $\frac{1}{500}$
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à  $\frac{1}{100}$

On pourra noter :

A l'événement « l'alarme se déclenche » ;

I l'événement « un incident se produit » ;

$\bar{A}$  et  $\bar{I}$  leurs événements contraires respectifs.

Ainsi, par exemple,  $A \cap \bar{I}$  représente l'événement « l'alarme se déclenche sans qu'il y ait incident ».

Partie A

1° Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.

En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.

2° Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?

3° L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Partie B

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

- 1 000 € pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;
- 3 000 € pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;
- 200 € lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.

Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

1° Donner la loi de probabilité de X.

2° Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?

**CORRECTION**



Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée : • la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à  $\frac{1}{50}$  • la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à  $\frac{1}{500}$  • la probabilité qu'un incident se produise est égale à  $\frac{1}{100}$  On pourra noter : A l'événement « l'alarme se déclenche » ; I l'événement « un incident se produit » ;  $\bar{A}$  et  $\bar{I}$  leurs événements contraires respectifs. Ainsi, par exemple,  $A \cap \bar{I}$  représente l'événement « l'alarme se déclenche sans qu'il y ait incident ».

La probabilité que l'alarme se déclenche par erreur est égale à  $\frac{1}{50}$

$$P(A \cap \bar{I}) = \frac{1}{50}$$

La probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est de  $\frac{1}{500}$

$$P(I \cap \bar{A}) = \frac{1}{500}$$

la probabilité qu'un incident se produise est de  $\frac{1}{100}$

$$p(I) = \frac{1}{100}$$

**Partie A 1° Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche. En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.**

$$\text{On a } p(I) = p(I \cap A) + p(I \cap \bar{A}) \text{ donc } p(I \cap A) = p(I) - p(I \cap \bar{A}) = \frac{1}{100} - \frac{1}{500} = \frac{4}{500} = \frac{1}{125}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{p(I \cap A) = \frac{1}{125}}$$

$$p(A) = p(A \cap I) + p(A \cap \bar{I}) = \frac{1}{125} + \frac{1}{50} = \frac{7}{250}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{p(A) = \frac{7}{250}}$$

**2° Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?**

Le système est mis en défaut quand l'alarme se déclenche sans incident ou quand un incident se produit sans que l'alarme se déclenche.

$$p((A \cap \bar{I}) \cup (\bar{A} \cap I)) = p(A \cap \bar{I}) + p(\bar{A} \cap I) = \frac{1}{50} + \frac{1}{500} = \frac{11}{500}$$

**3° L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?**

$$p_{A(I)} = \frac{p(A \cap I)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{7}{250}} = \frac{1}{125} \times \frac{250}{7} = \frac{2}{7}$$

**Partie B Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant : • 1 000 € pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ; • 3 000 € pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ; • 200 € lorsque l'alarme se déclenche par erreur. On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour. Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise. 1° Donner la loi de probabilité de X.**

$$p(X = 1000) = p(I \cap A) = \frac{1}{125} \quad p(X = 3000) = p(\bar{A} \cap I) = \frac{1}{500} \quad p(X = 200) = p(A \cap \bar{I}) = \frac{1}{50}$$

Événement	$I \cap A$	$I \cap \bar{A}$	$A \cap \bar{I}$	$\bar{A} \cap \bar{I}$
X	1000 €	3000 €	200 €	0 €
p	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{97}{100}$

**2° Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?**

$$E(X) = \frac{1}{125} \times 1000 + \frac{1}{500} \times 3000 + \frac{1}{50} \times 200 + \frac{97}{100} \times 0 = 8 + 6 + 4 = 18 \text{ €}$$