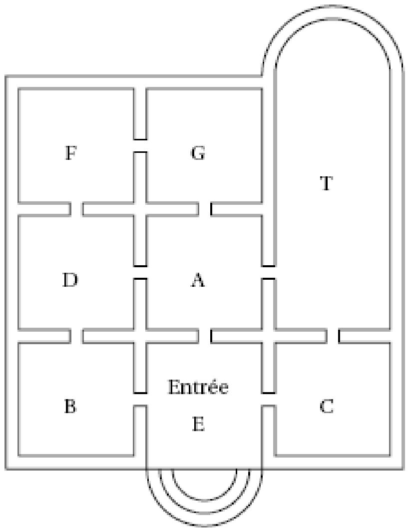
Baccalauréat S centres étrangers juin 2001 EX 1 5 points Enseignement obligatoire et de spécialité.
Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.
Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

• Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
• Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

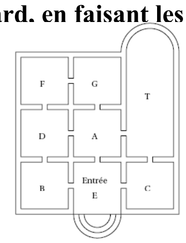


Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :

• Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDE.
• Le trajet codé EBDB est impossible avecles hypothèses choisies.

1° On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.
a) Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.
b) Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.
c) Déterminer la probabilité $p1$ de l'événement : "La quatrième salle du trajet est F ".
d) Pour des raisons techniques, le directeur installe les oeuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité $p2$ de l'événement " Le trajet passe par la salle T ″.
2° Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.
a) Calculer la probabilité de l'événement $(X = 1)$.
b) Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T.
(Donner le résultat arrondi au millième.)
c) Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T. Prouver qu'il a tort.

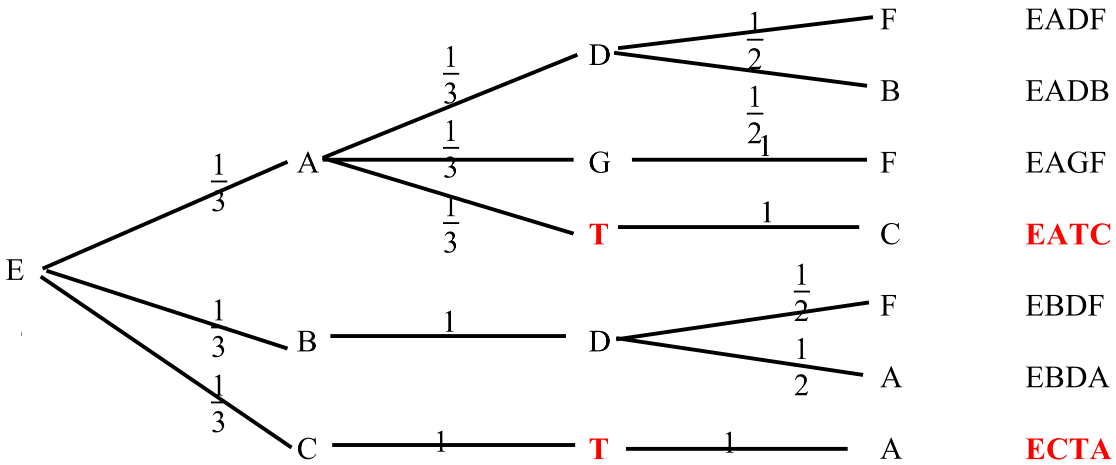
EX 1 5 points Enseignement obligatoire et de spécialité. Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition. Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard. en faisant les hypothèses suivantes : • Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.



• Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer. Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :• Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDE.

• Le trajet codé EBDB est impossible avecles hypothèses choisies.

1° On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes. a) Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur. b) Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$. c) Déterminer la probabilité p_1 de l'événement : "La quatrième salle du trajet est F ". d) Pour des raisons techniques, le directeur installe les oeuvres les plus intéressantes dans la salleT. Déterminer la probabilité p_2 de l'événement "Le trajet passe par la salleT".



b) $p(EBDF) = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

c) $p_1 =$ $p(EBDF) + p(EAGF) + p(EADF) = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

d) $p_2 = p(EATC) + p(ECTA) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{4}{9}$

2° Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.
a) Calculer la probabilité de l'événement (X = 1). b) Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

On répète **10** fois l'expérience de Bernouilli "Effectuer un trajet, de manière **indépendante** et selon les hypothèses précédentes" Passer par la salle T est une issue favorable de probabilité $p_2 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$

Donc, X suit la loi Binomiale de paramètres n = 10 , $p = \frac{4}{9}$.

a) $p(X = 1) = \binom{10}{1} \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^9 \approx 0{,}0224$

b) $p(X < 2) = p(X = 1) + p(X = 0) = \binom{10}{1} \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^9 + \left(\frac{5}{9}\right)^{10} \approx 0{,}0252$

$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = \approx 1 - 0{,}0252$ Donc $P(X \geq 2) \approx 0{,}9748$

c) Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T. Prouver qu'il a tort.

Dans ces condition la probabilité de passer par la salle T devient $\frac{1}{3} < \frac{4}{9}$

$p(X < 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 \times \frac{1}{3} \approx 0{,}1041$ donc $p(X \geq 2) < 0{,}9747$.