

_ Baccalauréat série S Antilles–Guyane juin 2003_ EXERCICE 2 5 points

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1° Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.

2° Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a) Définir la loi de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre?

3° a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %.

Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4° La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0007, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 0,0007 e^{-0,0007x}$.

Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.



CORRECTION

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1° Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.

S : L'article a un défaut de soudure. $P(S) = 0,03$

E : l'article a un défaut sur un composant électronique. $P(E) = 0,02$.

E et S sont indépendants donc $P(E \cap S) = P(E) \times P(S) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$.

$S \cup E$: l'article est défectueux.

$P(S \cup E) = P(S) + P(E) - P(S \cap E) = 0,03 + 0,02 - 0,0006 = 0,0494$.

2° Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux. Définir la loi de X.

On répète 800 fois la même épreuve de Bernoulli avec deux issues possibles : l'article est défectueux ou l'article ne l'est pas. Les épreuves sont indépendantes puisque les défauts d'un article ne dépendent pas d'autres articles. X compte le nombre d'articles défectueux donc X suit une loi binomiale de paramètre 800 et $P(D) = 0,0494$.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre?

$E(X) = n \times p = 800 \times 0,0494 = 39,52$. Sur un lot de 800 articles il y a en moyenne 40 articles défectueux.

3° a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

Si N représente le nombre d'article défectueux de la commande. N suit une loi binomiale de paramètre 25 et 0,0494

$P(N \geq 2) = 1 - P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2)$

$$= 1 - 0,9506^{25} + 25 \times 0,9506^{24} \times 0,0494 + \frac{25 \times 24}{2 \times 1} \times 0,9506^{23} \times 0,0494^2 \approx 0,1238.$$

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

Soit n le nombre d'articles à commander et N le nombre d'articles défectueux de la commande.

$P(N \geq 1) \leq 0,5 \Leftrightarrow 1 - P(N = 0) \leq 0,5 \Leftrightarrow 1 - 0,9506^n \leq 0,5 \Leftrightarrow 0,9506^n \geq 0,5 \Leftrightarrow n \times \ln(0,9506) \geq \ln(0,5)$

$\Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)}$ car $\ln(0,5) < 0$ $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)} \approx 13,68$ donc pour que la probabilité d'avoir au moins un article

défectueux soit inférieure à 50% le commerçant doit pas commander plus de 13 articles.

4° La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0007, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 0,0007 e^{-0,0007x}$.

Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

$$P(700 \leq T \leq 1000) = \int_{700}^{1000} f(t) dt = \int_{700}^{1000} 0,0007 e^{-0,0007 t} dt = \left[-e^{-0,0007 t} \right]_{700}^{1000} = -e^{-0,7} + e^{-0,49} \approx 0,116.$$

La probabilité qu'un article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours est égale à 0,116 à 10^{-3} près

$$E(X) = k = \sum_1^n \binom{n}{k} \times k \times p^k \times q^{k-1}$$

On sait que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_1^n \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \times k \times p^k \times q^{k-1} = \sum_1^n n \times \binom{n-1}{k-1} \times p^k \times q^{k-1} = n \times p \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k-1} \times q^{n-1-k+1} \\ &= n \times p \times (p+q)^{n-1} = n \times p \end{aligned}$$