Asie juin 2000

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette.

Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$.

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.

On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier n strictement positif, on considère les événements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au $n^{\text{ième}}$ coup » ;

B_n : « Alice rate la cible au $n^{\text{ième}}$ coup ». On pose $p_n = p(A_n)$.

Pour les questions 1. et 2., on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1° Déterminer p_1 et montrer que $P_2 = \frac{4}{15}$. 2° Montrer que, pour tout entier naturel n > 2, $p_n = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3° Pour n > 1, on pose $U_n = p_n - \frac{3}{13}$.

a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme U_1 et la raison q.

b) Ecrire U_n puis p_n en fonction de n.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

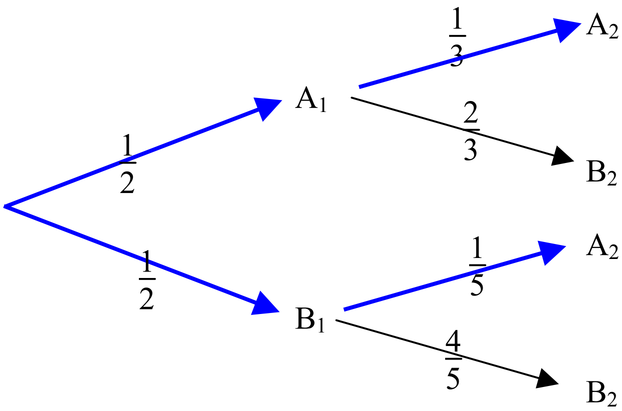
CORRECTION

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier n strictement positif, on considère les événements suivants : An : « Alice atteint la cible au nième coup » ; Bn : « Alice rate la cible au nième coup ». On pose pn = p(An). Pour les questions 1. et 2., on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré. 1° Déterminer p1 et montrer que P2 = $\frac{4}{15}$.

Au premier lancer Alice a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer donc : $p_1 = \frac{1}{2}$

Lorsqu'Alice atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$, donc $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{3}$

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$, donc $P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{5}$ et donc $P_{B_1}(A_2) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

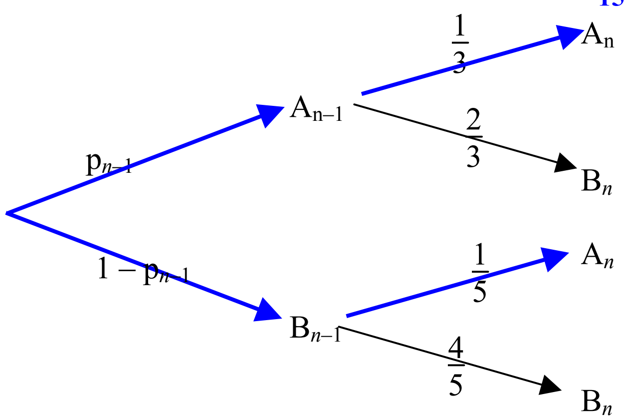


$\mathbf{P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}$

$\mathbf{P(B_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}}$

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5+3}{30} = \frac{4}{15}$$

2° Montrer que, pour tout entier naturel n > 2, Pn = $\frac{2}{15}$ Pn-1 + $\frac{1}{5}$.



$\mathbf{P(A_n \cap A_{n-1}) = p_{n-1} \times \frac{1}{3}}$

$\mathbf{P(\overline{A_n} \cap A_{n-1}) = (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{5}}$

$P_{A_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{3}$ et $P_{B_n}(A_n) = \frac{1}{5}$

$$P(A_n) = P(A_{n-1} \cap A_n) + P(B_{n-1} \cap A_n) = P(A_{n-1}) \times P_{A_{n-1}}(A_n) + P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(A_2) = p_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{5}$$

$$p_n = P(A_n) = p_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15} p_{n-1} + \frac{1}{5}$$

3° Pour n > 1, on pose un = Pn – $\frac{3}{13}$.

a) Montrer que la suite (un) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u1 et la raison q.

$U_{n+1} = \mathrm{p}_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{5\times 13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{6}{15\times 13} = \frac{2}{15}(p_n - \frac{2}{13}) = \frac{2}{15}U_n$

La suite (U_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{15}$

$U_1 = \mathrm{p}_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{13-6}{26} = \frac{7}{26}$

b) Ecrire un puis pn en fonction de n.

La suite (U_n) est géométrique de raison $\frac{2}{15}$ donc $U_n = U_1 \times q^{n-1} = U_1 \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = \frac{7}{26}\times\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$

$p_n = U_n + \frac{3}{13} = \frac{7}{26}\times\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}$ pn

La suite (U_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{15}$ et $\left|\frac{2}{15}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n + \frac{3}{13}\right) = \frac{3}{13}$