France juin 2005
EXERCICE 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1° Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

2° Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b) Calculer la probabilité de l'événement R.

c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3° L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n > 0,99$.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près. Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique. 1° Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies. a) Déterminer la loi de probabilité de X

x peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3

$$p(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\times\binom{3}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{3\times 2\times 1}{13\times 12\times 11} = \frac{1}{286} \approx 0{,}003$$

$$p(X = 1) = \frac{\binom{10}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{13}{3}} = 10\times\frac{3\times 2}{2\times 1}\times\frac{1}{286} = \frac{30}{286} = \frac{15}{143} \approx 0{,}104$$

$$p(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{13}{3}} = 3\times\frac{10\times 9}{2\times 1}\times\frac{1}{286} = \frac{135}{286} \approx 0{,}472$$

$$p(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}\times\binom{3}{0}}{\binom{13}{3}} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}\times\frac{1}{286} = \frac{120}{286} = \frac{60}{143} \approx 0{,}419$$

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = 0\times\frac{1}{286} + 1\times\frac{15}{143} + 2\times\frac{135}{286} + 3\times\frac{60}{143} = \boxed{\frac{30}{13}} \approx \boxed{2{,}307.}$$

Remarque : comme pour la loi binomiale on a $E(x) = n\times p = 3\times\frac{10}{13}$

2° Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants : C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique », C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique », R : « L'enfant prend une bille rouge », V : « L'enfant prend une bille verte ». a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b) Calculer la probabilité de l'événement R.

$$p(R) = \frac{1}{2}\times\frac{10}{13} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{7} = \frac{109}{182} \approx 0{,}598$$

c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

$$p_R(C1) = \frac{p(R\cap C_1)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13}\times\frac{182}{109} = \frac{70}{109} \approx 0{,}642$$

3° L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

On répète n expérience de Bernouilli indépendantes. Si on défini la variable aléatoire Y qui donne le nombre de boules rouge tirées alors on peut dire que Y suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{109}{182}$

$$p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(1 - \frac{109}{182}\right)^n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n > 0{,}99$.

$$p_n > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n > 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{73}{182}\right) < \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{73}{182}\right) > 0$$

$$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \approx 5{,}04 \qquad p_n > 0{,}99 \Leftarrow n \geq 6$$