Baccalauréat S Polynésie juin 2002 5 points Commun à tous les candidats

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

	A	**B**	**C**
1			
2			
3			

On note les évènements suivants :

- H: « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V: « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D: « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N: « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1° Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.

En déduire que la probabilité de N est égale à $\frac{19}{21}$.

2° On considère la variable aléatoire X définie par :

- $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
- $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
- $X = -2$, lorsque N est réalisé.

Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

Hors sujet : Dans le cas où $\alpha = 16$, calculer E(X), V(X) et σ_X et représenter graphiquement la fonction de répartition F

3° Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.

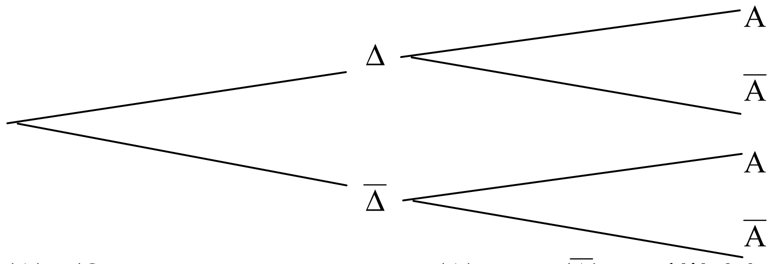
On note Δ l'évènement : « la machineM_1 est déréglée ».

a) Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_\Delta(H)$,
puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(V)$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(D)$.

b) En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\frac{3}{28}$.

4° A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$.

Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



Calculer p(A) . (On pourra remarquer que $p_\Delta(A)$ et $p_{\overline{\Delta}}(\overline{A})$ ont déjà été calculées.)

5° On ne sait pas lorsqu'on joue, si la machine M_1 est en bon état de marche. On joue une partie et on constate que les trois jetons sont alignés. Déterminer la probabilité pour que la machine M_1 soit déréglée.

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

	A	B	C
1			
2			
3			

On note les évènements suivants :

• H: « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;

• V: « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;

• D: « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;

• N: « Les trois jetons ne sont pas alignés ».*Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.*1° Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.En déduire que la probabilité de N est égale à $\frac{19}{21}$.

Il y a $\binom{9}{3}$ manières de remplir 3 cases parmis 3×3 cases .

Il y a 3 maniéres de remplir 3 cases alignés horizontalement.

Il y a 3 maniéres de remplir 3 cases alignés verticalement.

Il y a 2 maniéres de remplir 3 cases alignés en diagonale.

Il y a équiprobabilité donc : $p(H) = \frac{3}{\binom{9}{3}} = \frac{3}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}} = \frac{1}{28} = p(V)$ et $p(D) = \frac{2}{\binom{9}{3}} = \frac{2}{\frac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 3}} = \frac{1}{42}$

$p(\overline{N}) = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{42} = \frac{2}{21}$ et $p(N) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$

Variante. Pour remplir trois cases la machine M_1 a 9 possibilités, la machine M_2 en a 8 et la machine M_3 en a 7×

Pour remplir trois cases verticalement

M_1 a 9 possibilités de placer le 1^{ier} jeton M_2 a alors 2 possibilités de placer le 2^{ième} jeton et M_3 n'a qu'une possibilité de placer le 3^{ième} jeton On a donc : $p(V) = \frac{9 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{28} = p(H)$

Pour remplir trois cases en diagonale

soit la machine M_1 place le premier jeton a un coin et alors la machine M_1 a 4 possibilités de placer le jeton a un coin, la machine M_2 a alors 2 possibilité de placer le 2^{ième} jeton et la machine M_3 n'a alors qu'une possibilité de placer le 3^{ième} jeton

soit la machine M_1 place le 1^{ier} jeton au centre du carré et alors la machine M_2 a alors 4 possibilités de placer le 2^{ième} jeton et la machine M_3 n'a alors qu'une possibilité de placer le 3^{ième} jeton

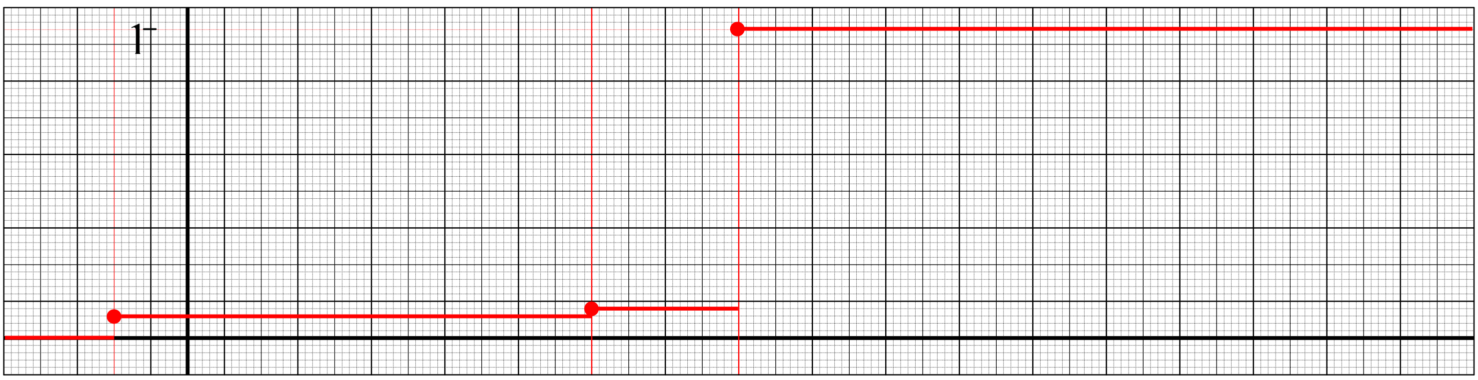
$p(D) = \frac{4 \times 2}{9 \times 8 \times 7} + \frac{4}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{42}$

2° On considère la variable aléatoire X définie par : • X = 20, lorsque H ou V est réalisé • X = α, lorsque D est réalisé • X =−2, lorsque N est réalisé. Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

X	20	α	-2	$E(X) = 20 \times \frac{1}{28} + \alpha \times \frac{1}{42} - 2 \times \frac{19}{21} = \frac{\alpha - 16}{42}$.
P	$\frac{1}{14} = \frac{3}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{19}{21} = \frac{38}{42}$	$E(X) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 16$.

Hors sujet : Dans le cas où α = 16, calculer E(X), V(X) et σ_X et représenter graphiquement la fonction de répartition F

$E(X) = 0$. $V(X) = \frac{1608}{42}$ $\sigma_X = \sqrt{\frac{1608}{42}} = \sqrt{\frac{268}{7}} \approx 6{,}19$



3° Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille. On note Δ l'évènement : « la machineM_1 est déréglée ». a) Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_\Delta(H)$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(V)$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(D)$.

Pour remplir trois cases horizontalement
M1 a 4 possibilités M2 a alors 2 possibilités et M3 n'a qu'une possibilité.
Pour remplir trois cases M1 a 4 possibilités M2 a alors 8 possibilités et M3 a 7 possibilités.

$$p_\Delta(H) = \frac{4\times 2}{4\times 8\times 7} = \frac{1}{28} = p_\Delta(V)$$

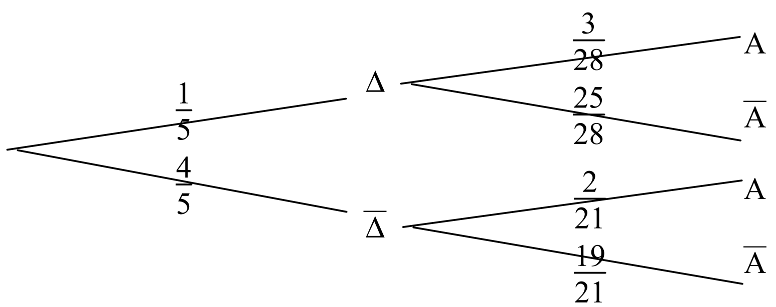
Pour remplir trois cases en diagonale la machine M1 place le premier jeton a un coin et alors la machine M1 a 4 possibilités de placer le jeton a un coin, la machine M2 a alors 2 possibilité de placer le $2^{\text{ième}}$ jeton et la machine M3 n'a alors qu'une possibilité de placer son jeton

$$p_\Delta(D) = \frac{4\times 2}{4\times 8\times 7} = \frac{1}{28}$$

b) En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\frac{3}{28}$.

$$p_\Delta(N) = \frac{1}{28}\times 3 = \frac{3}{28}$$

4° A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



Calculer p(A) . (On pourra remarquer que $p_\Delta(A)$ et $p_{\overline{\Delta}}(\overline{A})$ ont déjà été calculées.)

$$p(A) = \frac{1}{5}\times\frac{3}{28} + \frac{4}{5}\times\frac{2}{21} = \frac{41}{420}$$

5° On ne sait pas lorsqu'on joue, si la machine M_1 est en bon état de marche. On joue une partie et on constate que les trois jetons sont alignés. Déterminer la probabilité pour que la machine M_1 soit déréglée.

$$p_A(\Delta) = \frac{\frac{1}{5}\times\frac{3}{28}}{\frac{41}{420}} = \frac{9}{41}$$