Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2005 EXERCICE 1 4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

Alain achète 50 composants.

1° Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

2° Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

3° Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1° Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

a) si ce composant est défectueux ;

b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

2° Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0{,}02\, e^{-5 \times 10^{-4} t} + 0{,}98\, e^{-10^{-4} t}.$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3° Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$:

Pour $0 \leq a \leq b$, $P([a ; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

Pour $c \geq 0$, $P([c ; +\infty[) = 1 - \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

CORRECTION

Les parties A et B sont indépendantes Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02. Partie A On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants. 1° Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.

Alain répète 50 fois la même épreuves indépendantes. chaque épreuve a deux issues possibles "être défectueux" ou "ne pas être défectueux" X compte le nombre de composants défectueux donc X suit une loi binomiale de paramètre 50et P(D) = 0,02.

$P(X = 2) = \binom{50}{2} 0{,}02^2 \times 0{,}98^{48} \approx 0{,}2.$

2° Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?
Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}02^0 \times 0{,}98^{50} \approx 0{,}64$

3° Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

$E(X) = n \times p = 50 \times 0{,}02 = 1$. il y a en moyenne un aricle défectueux parmi les 50 composants achetés.

Partie B On suppose que la durée de vie T1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous). 1° Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures : a) si ce composant est défectueux ;

$$P(T1 \geq 1000) = 1 - \int_0^{1000} 5\ 10^{-4}\ e^{-5 \times 10^{-4} \times t}\, dt = 1 - \left[-e^{-5 \times 10^{-4} \times t}\right]_0^{1000} = 1 + e^{-0,5} - 1 = e^{-0,5} \approx 0{,}61$$

b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

$$P(T2 \geq 1000) = 1 - \int_0^{1000} 10^{-4}\ e^{-10^{-4} \times t}\, dt = 1 - \left[-e^{-10^{-4} \times t}\right]_0^{1000} = 1 + e^{-0,1} - 1 = e^{-0,1} \approx 0{,}90.$$

2° Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard. Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est : $P(T \geq t) = 0{,}02\ e^{-5 \times 10^{-4} \times t} + 0{,}98\ e^{-10^{-4} \times t}$.
(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

$$P([c\ ;+\infty[) = 1 - \int_a^b \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}$$

On note D l'événement "le composant est défectueux"

$$P(T \geq t) = P(D \cap (T \geq t)) + P(\overline{D} \cap (T \geq t)) = P_D(T \geq t) \times p(D) + P_{\overline{D}}(T \geq t) \times P(\overline{D})$$

$$= 0{,}02 \times P(T1 \geq t) + 0{,}98 \times P(T2 \geq t) = 0{,}02\ e^{-5 \times 10^{-4} \times t} + 0{,}98\ e^{-10^{-4} \times t}$$

3° Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près. Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\ ; +\infty[$:
Pour $0 \leq a \leq b$, $P([a\ ;b]) = \int_a^b \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$. Pour $c \geq 0$, $P([c\ ;+\infty[) = 1 - \int_a^b \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.

$$P_{T \geq 1000}(D) = \frac{P(D)}{P(T \geq 1000)} = \frac{0{,}02}{0{,}02\ e^{-5 \times 10^{-4} \times 1000} + 0{,}98\ e^{-10^{-4} \times 1000}} = \frac{0{,}02}{0{,}02\ e^{-0,5} + 0{,}98\ e^{-0,1}} \approx 0{,}018$$