Amérique du Sud décembre 2002 EXERCICE 2 5 points

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.
Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.
1° On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6.
On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir?
c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge?
2° On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
a) Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3e boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$
b) Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai? Justifier.

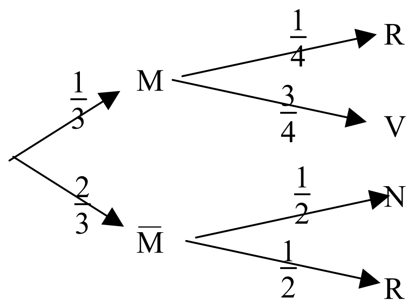
CORRECTION

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. 1° On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B. a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

On note

M l'événement "obtenir un multiple de 3 en lançant le dé"

N l'événement "obtenir une boule noire".



On sait que $p(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

L'urne A contient une boule rouge et trois boules vertes

donc $P(M \cap N) = P(\emptyset) = 0$

L'urne B contient deux boules rouges et deux boules noires

donc $P_{\overline{M}}(N) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(N) = P(N \cap A) + P(B \cap N) = 0 + P_{\overline{M}}(N) \times P(\overline{M}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir?

On note V l'événement "obtenir une boule verte".

On note R l'événement "obtenir une boule rouge".

L'urne A contient une boule rouge et trois boules vertes

donc $P_M(V) = \frac{3}{4}$

L'urne B contient deux boules rouges et deux boules noires

donc $P(\overline{M} \cap V) = P(\emptyset) = 0$

$P(V) = P(V \cap M) + P(V \cap \overline{M}) = P_M(V) \times P(M) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

$P(R) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 4 - 3}{12} = \frac{5}{12}$

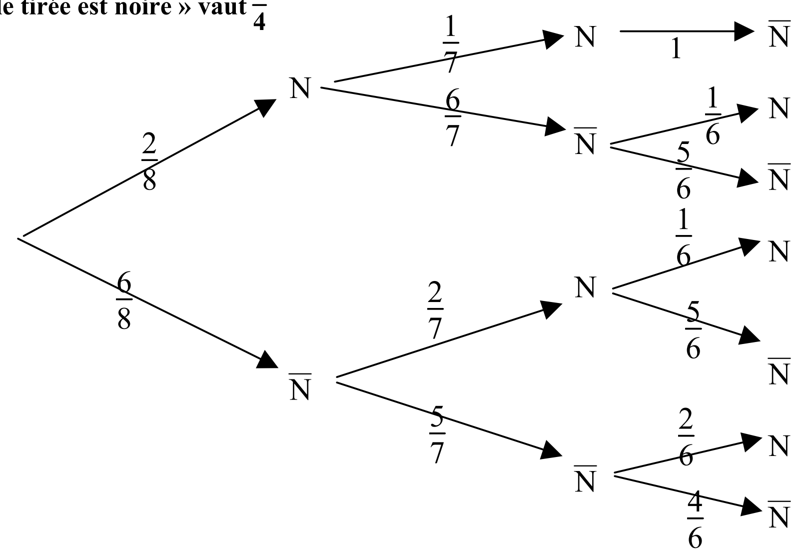
c'est la boule rouge qui a le plus de chance de sortir.

c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

$$P_R(\overline{M}) = \frac{P(R \cap \overline{M})}{P(R)} = \frac{P_{\overline{M}}(R) \times P(\overline{M})}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$$

2° On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a) Montrer que la probabilité de l'événement « la 3e boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$



Pour avoir tous les tirages possibles
8 choix possible pour la première boule
7 choix pour la 2e
6 choix pour la 3e

Il y a deux boules noires et 6 non noires/
P = P(N,$\overline{N}$,N) = P($\overline{N}$, N ,N) + P($\overline{N}$, $\overline{N}$, N)
Pour avoir (N, $\overline{N}$,N) on a
2 choix possible pour la première boule
6 choix pour la 2e
1 choix pour la 3e

$$P(N, \overline{N}, N) = \frac{2 \times 6 \times 1}{8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{28}$$

Pour avoir ($\overline{N}$, N ,N) on a
6 choix possible pour la première boule
2 choix pour la 2e
1 choix pour la 3e

$$P(\overline{N}, N, N) = \frac{6 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6} = \frac{1}{28}$$

Pour avoir ($\overline{N}$, $\overline{N}$,N) on a
6 choix possible pour la première boule
5 choix pour la 2e
2 choix pour la 3e

$$P(\overline{N}, \overline{N}, N) = \frac{6 \times 5 \times 2}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{28}$$

La probabilité cherchée est donc egale à : $\frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{5}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

b) Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai? Justifier.

Il y a 2 boules noires dans l'urne donc la probabilité que la première boule soit noire est égale à $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

On obtient la même probabilité .
On peut choisir mettre la première tirée en troisième position. On obtiendra les mêmes issues possibles et donc la même probabilité d'avoir la une boule noire en première ou en troisième position. (et même en deuxième position)