Liban - Série S - juin 2003 Exercice 1 (4 points)

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du du $n^{\text{ième}}$ tirage.

1° Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

2° On considère les événements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du n−ième tirage »

U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors lors des $n - 1$ premiers tirages »

a) Calculer la probabilité de l'événement B_n.

b) Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de pn en fonction de n et vérifier l'égalité : $p_n = \dfrac{n-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

3° On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$S_n = 1 - \left(\dfrac{n}{2} + 1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b) Déterminer la limite de la suite (S_n).

CORRECTION

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des n – 1 premiers tirages et une boule blanche lors du du $n^{ième}$ tirage. 1° Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.

A chaque épreuve, la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne est égale à $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, et donc celle de tirer une boule noire est de $\frac{2}{3}$ (événement contraire).

p_2 : correspond au tirage de deux boule blanche : $p_2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

p_3 : on tire trois boules : une noire une blanche lors des deux premiers tirages $2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ et une dernière blanches $\frac{1}{3}$

Les tirages sont indépendants donc $p_2 = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

p_4 : on tire quatre boules : deux noire et une blanche lors des trois premiers tirages $3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$ et une dernière blanche $\frac{1}{3}$ on a donc $p_4 = 3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$ $\boxed{1}$

2° On considère les événements suivants : B_n : « On tire une boule blanche lors du $n^{ième}$ tirage » U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors lors des n – 1 premiers tirages » a) Calculer la probabilité de l'événement B_n.

Lors du $n^{ième}$ tirage il y a toujours 4 noires et deux blanches donc $p(B_n) = \frac{1}{3}$ $\boxed{0,5}$

b) Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n.

Un est réalisé lorsque au cours des n−1 épreuves identiques et indépendantes à deux issues, le « succès » (obtenir une boule blanche lors du tirage d'une boule) est obtenu une seule fois.
Si on note X le nombre de boules blanches tirées lors des $n–1^{ième}$ premier tirage X suit donc une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{3}$ et n – 1 et on a : $p(U_n) = p(X = 1) = (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$ $\boxed{0,5}$

c) En déduire l'expression de pn en fonction de n et vérifier l'égalité : $p_n = \frac{n-1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

les événements B_n et U_n sont indépendants donc $p_n = p(U_n \cup B_n) = p(U_n)\times p(B_n) = (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$p_n = (n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{1}{4} = \frac{n-1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Vérification : $p_2 = \frac{2-1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $p_3 = \frac{3-1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$ et $p_4 = \frac{4-1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{4}{27}$ $\boxed{0,5}$

3° On pose : $S_n = p_2 + p_3 +\dots+ p_n$. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $S_n = 1-\left(\frac{n}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Initialisation : $S_2 = p_2 = \frac{1}{9}$ et $1-\left(\frac{2}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1-2\times\frac{4}{9}=\frac{9-8}{9}=\frac{1}{9}$ On a bien $S_2 = 1-\left(\frac{2}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

Hérédité : Si $S_n = 1-\left(\frac{n}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

alors $S_{n+1} = S_n + p_{n+1} = 1-\left(\frac{n}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n+1--1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1+\left(-\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n+1-1}{4}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$1+\frac{-6n-12+2n}{12}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1-\left(\frac{4n+12}{12}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1-\frac{n+3}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1-\frac{n+3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$= 1-\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ $\boxed{1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2 : $S_n = 1-\left(\frac{n}{2}+1\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) Déterminer la limite de la suite (S_n).

$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{n}{2} \times \exp\left(n \times \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ On pose $N = n \times \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ on a alors $\frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \times N\,e^N$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \times N\,e^N = 0$ et donc et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$. $\boxed{\mathbf{0{,}5}}$