Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetés sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

– une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$

– une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$

Partie A

1° Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
– A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » ;
– A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;
– B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » ;
– B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;
– C1 : « la particule entre dans K1 » ;
– C2 : « la particule entre dans K2 ».

2° On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B; chaque particule A donne en se transformant une particule B.
On note p(t) la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant t = 0, on a p(0) = 0, 75.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$, o`u λ est une constante réelle.
La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1° Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

2° Au bout de combien d'années 10% des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B?

3° Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

La demi-vie des particules est le temps T nécessaire pour qu'un échantillon contenant N_0 particules A n'en contienne plus que $\frac{N_0}{2}$.

CORRECTION

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetés sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2. L'expérience est modélisée de la façon suivante :
– une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$
– une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$

A est l'événement : " la particule isolée est de type A"
B est l'événement : " la particule isolée est de type B"
un gaz constitué de 75 % de particules A donc p(A) = 0,75.
et 25 % de particules B donc P(B) = 0,25.

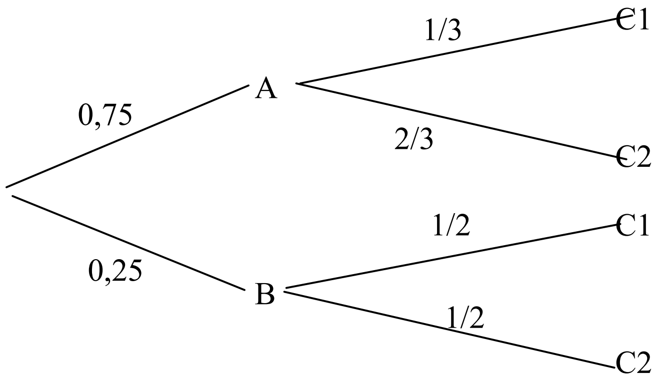
Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ donc :

$p_A(C1) = \frac{1}{3}$ et $p_A(C2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$

$p_B(C1) = p_B(C2) = \frac{1}{2}$

On peut représenter la situation par un arbre.



$p(A_1) = p(A \cap C1) = 0,75 \times 1/3 = 0,25$
$p(A_2) = p(A \cap C2) = 0,75 \times 2/3 = 0,5$
$p(B_1) = p(B \cap C1) = 0,25 \times 1/2 = 0,125$
$p(B_2) = p(B \cap C2) = 0,25 \times 1/2 = 0,125$

Partie A 1° Soit une particule au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
– A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 » – A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 » ;
– B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 » – B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 » ;
– C1 : « la particule entre dans K1 » – C2 : « la particule entre dans K2 ».

$p(A_1) = p(A \cap C1) = = p_A(C1) \times p(A) = 0,75 \times 1/3 = 0,25$
$p(A_2) = p(A \cap C2) = 0,75 \times 2/3 = 0,5$
$p(B_1) = p(B \cap C1) = 0,25 \times 1/2 = 0,125$
$p(B_2) = p(B \cap C2) = 0,25 \times 1/2 = 0,125$
$p(C1) = p(A \cap C1) + p(B \cap C1) = p(A1) + p(B1) = 0,25 + 0,125 = 0,275$
$p(C2) = p(A \cap C2) + p(B \cap C2) = p(A2) + p(B2) = 0,5 + 0,125 = 0,625.$

2° On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve de Bernouilli décrite en introduction.
La variable aléatoire X qui représente le nombre de particules entrées dans K2 suit une loi binomiale de paramètre5 et p(C2) = 0,275.

$p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,275^2 \times (1 - 0,275)^2 \approx 0,2882.$

Partie B Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B; chaque particule A donne en se transformant une particule B. On note p(t) la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant t = 0, on a p(0) = 0, 75. Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$, o`u λ est une constante réelle. La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans. 1° Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

1° $p(t) = \frac{p(0)}{2} \Leftrightarrow 0,75\, e^{-\lambda \times 5730} = \frac{1}{2} \times 0,75 \Leftrightarrow e^{-\lambda\, 5730} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\ 5730\, \lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,00012.$

2° Au bout de combien d'années 10% des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B?

Si 10% des particules A sont transformées en particule B on a alors.

$$p(t) = p(0) - 0{,}1 \times p(0) \Leftrightarrow 0{,}75\ e^{-\lambda t} = 0{,}75 \times 0{,}9 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0{,}9 \Leftrightarrow -\lambda\, t = \ln(0{,}9) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0{,}9)}{\lambda} \approx 871 \text{ ans.}$$

3° Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

Il y aura autant de particules de type A que de particules de type B quand :

$$p(t) = 1 - p(t) \Leftrightarrow p(t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}75 \times e^{-\lambda t} = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{0{,}5}{0{,}75} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\lambda\, t = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(1{,}5)}{\lambda} \approx 3352\text{ans}$$