Polynésie 99.

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.

On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les deux événements suivants :

A: <<On obtient des boules des deux couleurs >>;

B : <<On obtient au plus une blanche >>.

1° a) Calculer la probabilité de l'évènement :

<<Toutes les boules tirées sont de la même couleur >>.

b) Calculer la probabilité de l'évènement :

<<On obtient exactement une boule blanche >>.

c) En déduire que les probabilités p(A ∩B), p(A), p(B) sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \qquad p(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2° Montrer que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si et seulement si :

$$2^{n-1} = n + 1$$

3° Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux par :

$$U_n = 2^{n-1} - (n + 1)$$

Calculer U_2 , U_3 , U_4 .

Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

4° En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

CORRECTION

1° a) Soit E l'événement "toutes les boules tirées sont blanches" et F l'événement "toutes les boules tirées sont noires". On cherche $p(E \cup F)$ avec E et F disjoints (incompatibles)

$p(E) = p(F) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $p(E \cup F) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

b) On obtient donc une blanche et n – 1 noires.

Il y a n positions possibles pour la boule blanche. la probabilité cherchée est donc : $n \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$

c) $A \cap B$ est l'événement : " On obtient des boules de deux couleurs et pas plus d'une blanche"

C'est à dire "On obtient une seule boule blanche" Donc $p(A \cap B) = \frac{1}{2^n}$

$\overline{A}$ est l'événement : " toutes les boules tirées sont de même couleur" donc $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Soit G l'événement " obtenir une seule boule blanche" et F "toutes les boules tirées sont noires"

$B = G \cup F$ et les événements sont disjoints.

$p(G) = \frac{n}{2^n}$ (1°b)) et $p(F) = \frac{1}{2^n}$ (1° a)) donc $p(B) = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

2° $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n} \Leftrightarrow n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \times (n + 1) \Leftrightarrow n\,2^{n-1} = (2^{n-1} - 1)(n + 1)$

$\Leftrightarrow n\,2^{n-1} = n\,2^{n-1} - n - 1 + 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} = n + 1$.

3° $U_n = 2^{n-1} - (n + 1)$.

$U_2 = 2^{2-1} - 3 = -1$, $U_3 = 2^2 - 4 = 0$, $U_4 = 2^3 - 5 = 3$.

$U_{n+1} - U_n = 2^n - (n + 2) - 2^{n-1} - (n + 1) = 2^{n-1}(2 - 1) - 1 = 2^n - 1 \geq 0$. la suite (U_n) est donc croissante.

4° A et b indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Leftrightarrow U_n = 0 \Leftrightarrow n = 3$.

p 189 n° 86 : La réunion 1995.

1° a) Il y a 10 choix pour le premier chiffre, 10 pour le second, 10 pour le troisième et 10 pour le dernier. 10^4

b) Il y a 10 choix pour le premier chiffre, 9 pour le second, 8 pour le troisième et 7 pour le dernier : $10 \times 9 \times 8 \times 7$

2° a) Il a $\binom{4}{2}$ façon de placer les deux 9, reste alors 2 façon de placer le 1 et une seule de placer le 5 : $\binom{4}{2} \times 2 \times 1$.

Après $n^{\text{ième}}$ essais il doit attendre 2^n minutes.

Quand il a introduit n codes il a attendu : $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2 \times \dfrac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1$.

$2^{n-1} - 1 \leq 24 \times 60 \Leftrightarrow 2^{n-1} \leq 1441 \Leftrightarrow (n - 1) \ln 2 \leq \ln 1441 \Leftrightarrow n \leq \dfrac{\ln 1441}{\ln 2} + 1 \Leftrightarrow n \leq 11$ (car n est un entier)