Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1° Dans un questionnaire à choix multiple (QCM), pour une question donnée, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.
La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).
Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

2° Donner la loi de probabilité de N.

3° Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?

4° A un concours, un candidat doit répondre à un QCM de quatre questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à trois questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II

Répondre au QCM proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions. L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

1° On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ».
Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former

Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
180	330	110

2° A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :
$p(A) = 0,4$; $p(B) = 0,5$; $p(\overline{A \cup B}) = = 0,35$

Combien vaut $p(A \cap B)$?

Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
$p(A \cap B) = 0,1$	$p(A \cap B)$	Les données sont insuffisantes pour répondre.

2° A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que : $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $p_A(B) = \frac{1}{4}$(probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut p(A) ?

Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
$p(A) = \frac{2}{3}$	$p(A) = \frac{1}{24}$	$p(A) = \frac{1}{12}$

3° Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart-type de X ?

Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

CORRECTION

A 1°

N	n	$-$ p
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

b) $E(X) = n \times \frac{1}{3} - p \times \frac{2}{3} = \frac{n - 2p}{3}$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow n - 2p = 0 \Leftrightarrow n = 2p$.

2° On répète l'expérience précédente 4 fois. X égale au nombre de réponses exacte suit une loi binomiale de paramètre 4 et $\frac{1}{3}$

2° On répète l'expérience précédente 4 fois. X égale au nombre de réponses exacte suit une loi binomiale de paramètre 4 et $\frac{1}{3}$.

$P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = 4 \times \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \approx 0{,}10$

B 1° On peut former $\binom{10}{3}$ paquet de 3 jetons. parmi ceux-ci $\binom{5}{3}$ ne contiennent que des nombres impairs (pas de nombres pairs) Il y a donc $\binom{10}{3} - \binom{5}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 120 - 10 = 110$. La réponse c) est juste

2° $P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}65 = 0{,}25$. La réponse b) est juste.

3° $P_A(B) \times P(A) = P(A \cap B)$ donc $\frac{1}{4} \times P(A) = \frac{1}{6}$ donc $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. La réponse a) est juste.

4° $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$

$E((X - \overline{X})^2) = (1-2)^2 \times \frac{1}{2} + (2-2)^2 \times \frac{1}{4} + (4-2)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 0 + \frac{4}{4} = \frac{3}{2}$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{2}}$ La réponse b) est juste.