Baccalauréat S France septembre 2001

Exercice 1 6 points Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes *a* et *b* contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher.

L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes *a* et *b* proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'évènement « l'urne *a* est choisie », B l'évènement « l'urne *b* est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note p_A (R) la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A.

1° Dans cette question, l'urne *a* contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne *b* contient quatre boules rouges et deux boules blanches.

a) Déterminer les probabilités suivantes : p (A), $p_A(R)$, $p(A \cap R)$.

b) Montrer que $p(R) = \frac{13}{30}$

c) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne *a* ?

2° Dans cette question, on suppose que l'urne *a* contient quatre boules blanches et l'urne *b* deux boules blanches. L'urne *a* contient en outre *n* boules rouges (où *n* désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne *b* en contient $(5 - n)$.

a) Exprimer p_A (R) et p_B (R) en fonction de *n*.

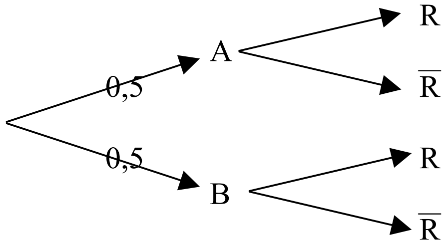
b) Démontrer que $p(R) = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4+n)(7-n)}$.

c) On sait que *n* ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes *a* et *b* donnant la plus grande valeur possible de p (R).

CORRECTION

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie. On note A l'évènement « l'urne a est choisie », B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ». On note pA (R) la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A. 1° Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches. a) Déterminer les probabilités suivantes : p (A), pA(R), p(A ∩ R).

Les deux choix étant équiprobables on a : p (B) = p(A) = 0,5



l'urne *a* contient une boule rouge et quatre boules blanches donc

$$p_A(R) = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$$p\ (A \cap R) = p_A\ (R) \times p\ (A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

b) Montrer que p(R) = $\frac{13}{30}$

l'urne *b* contient quatre boules rouges et deux boules blanches donc : $p_B\ (R) = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$

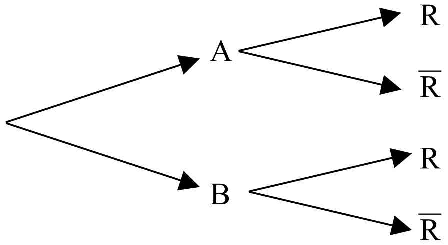
$$p\ (R) = p\ (A \cap R) + p\ (B \cap R) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{30}$$

c) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?

$$p_R(A) = \frac{p\ (A \cap R)}{p(R)} = \frac{1/10}{13/30} = \frac{1}{10} \times \frac{30}{13} = \frac{3}{13}$$

2° Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient (5 – n).

a) Exprimer pA (R) et pB (R) en fonction de n.



l'urne *a* contient quatre boules blanches et *n* boules rouges

$$p_A\ (R) = \frac{n}{4+n}$$

l'urne *b* contient (5 – *n*) boules rouges et deux boules blanches

$$p_B\ (R) = \frac{5-n}{5-n+2} = \frac{5-n}{7-n}$$

b) Démontrer que p(R) = $\frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$.

$$p\ (R) = p(R \cap A) + p(R \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{n}{4+n} + \frac{1}{2} \times \frac{5-n}{7-n} = \frac{n\ (7-n) + (4+n)\ (5-n)}{2\ (4+n)\ (7-n)} = \frac{7\ n - n^2 + 20 - 4\ n + 5\ n - n^2}{2\ (4+n)\ (7-n)}$$

$$= \frac{-2\ n^2 + 8\ n + 20}{2\ (4+n)\ (7-n)} = \frac{-n^2 + 4\ n + 10}{(4+n)\ (7-n)}$$

c) On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de p (R).

n	0	1	2	3	4	5
$\frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$	$\frac{5}{14} \approx 0{,}357$	$\frac{13}{30} \approx 0{,}433$	$\frac{7}{15} \approx 0{,}467$	$\frac{13}{28} \approx 0{,}464$	$\frac{5}{12} \approx 0{,}417$	$\frac{5}{18} \approx 0{,}278$