Polynésie juin 2003 EXERCICE 1 4 points

Partie A

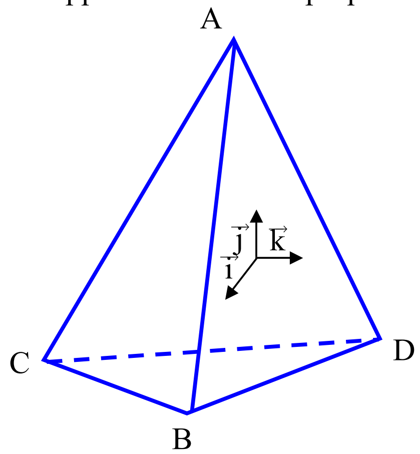
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

A(0 ; 0 ; 3), B($2\sqrt{2}$; 0 ; – 1), C($-\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$ -;– 1), D($-\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; – 1).

1° Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.

2° On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.

3° Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés.

Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1° Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.

2° Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.

3° Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».

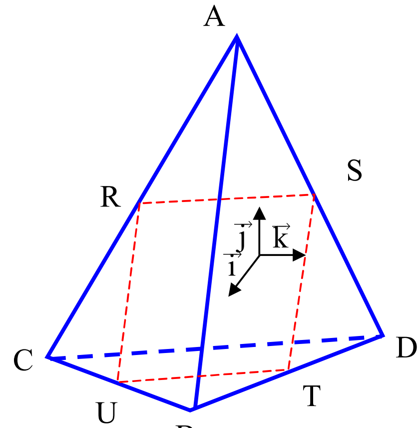
4° On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.

Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

CORRECTION

Partie A Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives : $A(0 ; 0 ; 3)$, $B(2\sqrt{2} ; 0 ; -1)$, $C(-\sqrt{2} ; -\sqrt{6} ; -1)$, $D(-\sqrt{2} ; \sqrt{6} ; -1)$.

1° Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}-0\\0-0\\-1-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $AB = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}-0\\\sqrt{6}-0\\-1-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{6}\\-4\end{pmatrix}$ et $AC = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+(-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-\sqrt{6}\\-4\end{pmatrix}$ et $AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ $\quad\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$ et $BC = \sqrt{9\times 2+6+0} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$ et $CD = 2\sqrt{6}$ $\quad\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$ et $BD = BC = 2\sqrt{6}$

2° On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.

Dans le triangle ACD, R est le milieu de [AC] et S celui de [AD] donc $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Dans le triangle BCD, T est le milieu de [BD] et U celui de [BC] donc $\overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

On a donc bien $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{TU}$ donc le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

$\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. On sait que : $A(0;0;3)$, $B(2\sqrt{2};0;-1)$, $C(-\sqrt{2};-\sqrt{6};-1)$, $D(-\sqrt{2};\sqrt{6};-1)$.

donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\\0+0-\sqrt{6}+\sqrt{6}\\3-1-1-1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OU} = \vec{0}$ donc O est le milieu de [SU] et donc O est le centre du parallélogramme

Variante calculatoire : R $\left(\frac{0-\sqrt{2}}{2}, \frac{0-\sqrt{6}}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$ donc R$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$

De même S $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$, T $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right)$ et U $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right)$

On calcule les coordonnées du milieu I de [RT]

$x_I = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$, $y_I = \dfrac{-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = 0$ et $z_I = \dfrac{1-1}{2} = 0$ donc le milieu de [RT] est bien le point O.

De même on calcule les coordonnées du milieu J de [SU]

$x_J = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0$, $y_J = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = 0$ et $z_J = \dfrac{1-1}{2} = 0$ donc le milieu de [RT] est bien le point O.

La quadrilatère RSTU a ses diagonales qui se coupent en leur milieu O c'est donc un parallélogramme.

3° Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.

Dans le triangle ACB, R est le milieu de [AC] et U celui de [BC] donc $\overrightarrow{RU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ de plus $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2\sqrt{2}\times 0 + 0\times 2\sqrt{6} + (-4)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{RU}\perp\overrightarrow{RS}$

le parallélogramme RSTU est donc un rectangle. de plus AB = CD donc
RU = RS donc le rectangle RSTU est un carré.

Partie B On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge. On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1° Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.

Pour chaque dé deux faces sont rouges donc au moins une face apparente sera rouge donc ily aura toujours au moins trois faces rouges apparentes donc la probabilité cherchée est égale à 1.

2° Calculer la probabilité pour que

Pour chaque dé une face seulement est bleue.

Pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucune face il faut qu'elle soit toujours cachée.

On a donc $P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

3° Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».

Pour que les six faces rougent soient visibles il faut que pour chaque dé les faces rouges ne soient pas cachées.

$P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

4° On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

On répète n fois la même expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Les n expériences sont indépendant

La variable aléatoire X qui compte le nombre d'expérience où l'événement E est réalisé suit donc une loi binomiale de paramètre n et $p(E) = \frac{1}{8}$

$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n$

$\left|\frac{1}{8}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.