Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie mars 2005

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit Xi la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i ème trajet et la valeur 0 sinon.

Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1° Déterminer la loi de probabilité de X.

2° Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$.

a) Calculer l'espérance mathématique de X.

b) Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3° Soit Zi la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \frac{1}{5}$.

4° On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a). Démontrer que $P(X \leq 2) = (1 - p)^{38}(741p^2 + 38p + 1)$.

b) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = (1 - x)^{38}(741x^2 + 38x + 1)$.

Montrer que f est strictement décroissante sur [0 ; 1] et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$.

c) En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de x_0).

CORRECTION

1° Les contrôles étant indépendants, on a un schéma de Bernouilli

de paramètre p (probabilité d'être contrôlé) et n = 40. On a donc $P(X = k) = \binom{40}{k} p^k (1 - p)^{40-k}$.

2° $p = \frac{1}{20}$ a) On a $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = n\,p = 40 \times \frac{1}{20} = 2$.

b) $P(X = 0) = \binom{40}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{40} = \left(\frac{19}{20}\right)^{40}$

$P(X = 1) = \binom{40}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{39} = 40 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{38} \times \frac{1}{20} = 2 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{38}$

$P(X = 2) = \binom{40}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2 \times \left(\frac{19}{20}\right)^{38} = \frac{40 \times 39}{2} \times \left(\frac{19}{20}\right)^{38} \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{39}{40} \times \left(\frac{19}{20}\right)^{38}$

c) La probabilité d'être contrôlé au plus deux fois est $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}6767(3)$.

3° S'il ne fait pas prendre, le fraudeur gagne 400 €,

S'il se fait prendre i fois (avec $0 \leq i \leq 40$), il doit payer $100 \times i$ €.

On a donc $Z = 400 - 100\,X$.

Avec $p = \frac{1}{5}$, on a $E(Z) = E(400 - 100\,X) = 400 - 100 \times E(X) = 400 - 100 \times 40 \times \frac{1}{5} = -\,400$.

En moyenne sur 40 trajets il devra payer 400 €. . .

4° a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{40}{0} \times (1 - p)^{40} + \binom{40}{1} p \times (1 - p)^{39} + \binom{40}{2} p^2 (1 - p)^{38}$

$= (1 - p)^{40} + 40 \times p \times (1 - p)^{39} + \frac{40 \times 39}{2} p^2 (1 - p)^{38} = (1 - p)^{38} ((1 - p)^2 + 40\,p\,(1 - p) + 780\,p^2$

$= (1 - p)^{38} + 741\,p^2 + 38\,p + 1$.

b) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

On a $f'(x) = 38 \times (-1)(1 - x)^{37} (741\,x^2 + 38\,x + 1) + (1 - x)^{38} (1482\,x + 38)$

$= (1 - x)^{37} (-38\,(741\,x^2 + 38\,x + 1) + (1 - x)\,(1482\,x + 38))$

$= (1 - x)^{37} (-20158\,x^2 - 1444\,x - 38 + 1482\,x + 38 - 1482\,x^2 - 38\,x)$

$= -\,21640\,x^2\,(1 - x)^{37} = 21640\,x^2\,(x - 1)\,(1 - x)^6$.

f'(x) est du signe de (x − 1) donc négative sur [0 ; 1], donc f est décroissante sur cet intervalle

Sur [0 ; 1], f est décroissante et continue car dérivable ; f(0) = 1 et f(1) = 0 on peut donc appliquer le théorème de la bijection et dire qu'il existe un réel unique $0 < x_0 < 1$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$

La calculatrice permet de trouver $\frac{19}{100} < x_0 < \frac{19 + 1}{100}$. On a donc n = 19.

c) On a $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$.

Donc $P(X \leq 3) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow P(X \leq 2) \leq 0{,}01$. D'après la question précédente et comme la fonction f est décroissante , il faut et il suffit donc que $p \leq x_0$.

La plus petite valeur de p est donc x_0.