Polynésie juin 2004 Exercice 1 (4 points)

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.
La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.
1° Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2° Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3° Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?
4° On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5° Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?
Rappel :
Loi exponentielle de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$, dite aussi loi de duréede vie sans vieillissement :
pour $0 \leq a \leq b$, $p([a ; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt$ et pour $c \geq 0$, $p([c ; +\infty[ ) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\, dt$.

CORRECTION

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près. 1° Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125. On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

$p([c ; +\infty[ ) = p(X < c) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - [- e^{-\lambda t}]_0^c = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}$

$P (X > 10) = 0,286 \Leftrightarrow e^{-10 \lambda} = 0,286 \Leftrightarrow - 10 \lambda = \ln (0,286) \Leftrightarrow \lambda = - \dfrac{\ln (0,286)}{10}$

On a $\dfrac{\ln (0,286)}{10} \approx 0,125$ donc $\lambda \approx 0,125$.

2° Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

$P(X < 0,5) = 1 - P(X \geq 0,5) = 1 - e^{-0,5 \lambda} \approx 0,061$.

3° Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

$P_{X>8} (X > 10) = \dfrac{P(X > 10 \text{ et } X > 8)}{P(X > 8)} = \dfrac{P(X > 10)}{P(X > 8)} = \dfrac{e^{-10\lambda}}{e^{-8 \lambda}} = e^{-2 \lambda} = P(X > 2) \approx 0,779$

4° On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

Soit N la variable aléatoire qui compte le nombre d'oscilloscope qui a une durée de vie supérieure à 10 ans.
Le responsable de labo répète 15 épreuves indépendantes ayant chacune deux issues possibles. L'oscilloscope a eu duréee devie de supérieure à 10 ans avec une probabilité égale à 0,286. N suit une loi binomiale de paramètre 15 et 0,286.
$P (N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - 0,286^0 \times (1 - 0,286)^{15} \approx 0,994$.

5° Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

N suit ici une loi binomiale de paramètre n et 0,286.
$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - 0,286^0 \times (1 - 0,286)^n$
$P(N \geq 1) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,714^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,714^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \times \ln (0,714) \leq \ln (0,001)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln (0,001)}{\ln (0,714)}$ car $\ln (0,714) < 0$

$\dfrac{\ln (0,001)}{\ln (0,714)} \approx 20,5$ donc l'établissement devrait acheter au moins 21 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999.