Baccalauréat S Polynésie septembre 2005

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur 3 cases notées A,B et C.
A l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :
- Si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant (n + 1), elle est :

  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$

  soit en C avec une proba égale à $\frac{2}{3}$.
- Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant (n + 1), elle est :

  soit en C, soit en A de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est en C, elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement " à l'instant n la puce est en A" (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement b_n et c_n) la proba de l'événement A_n (respectivement B_n, C_n).
On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.
1° Calculer a_k, b_k, c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.

2° a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n. \end{cases}$

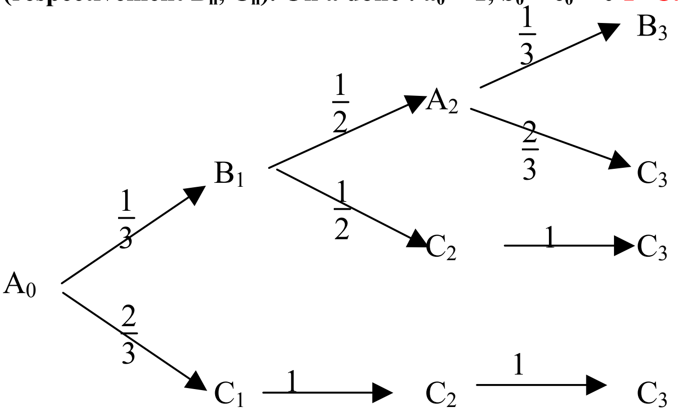
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

c) En déduire que pour tout entier naturel p, $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$

3° Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur 3 cases notées A,B et C. A l'instant 0, la puce est en A. Pour tout entier naturel n : - Si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant (n + 1), elle est : soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$ soit en C avec une proba égale à $\frac{2}{3}$. - Si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant (n + 1), elle est : soit en C, soit en A de façon équiprobable. - Si à l'instant n la puce est en C, elle y reste. On note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement " à l'instant n la puce est en A" (respectivement en B, en C). On note a_n (respectivement b_n et c_n) la proba de l'événement A_n (respectivement B_n, C_n). On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$ 1° Calculer a_k, b_k, c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.



$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = \frac{1}{3} \\ c_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ b_2 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} a_3 = 0 \\ b_3 = \frac{1}{18} \\ c_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} + \frac{12}{18} = \frac{17}{18} \end{cases}$

2° a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n. \end{cases}$

A l'instant n la puce est soit en A, soit en B, soit en C. les événements A_n, B_n et C_n forment donc une partition et donc $a_n + b_n + c_n = 1$.

Si la puce est en A à l'instant (n + 1) c'est qu'elle était en B à l'instant n et on a donc :

$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) = \frac{1}{2} \times b_n$$

Si la puce est en B à l'instant (n + 1) c'est qu'elle était en A à l'instant n et on a donc :

$$b_{n+1} = p(B_{n+1}) = p_{A_n}(B_{n+1}) \times p(A_n) = \frac{1}{3} \times a_n$$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

Pour tout entier naturel n on a : $a_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ donc : $a_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} a_n = \frac{1}{6} a_n$

c) En déduire que pour tout entier naturel p, $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$

On démontre par récurrence sur p que $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$

Initialisation : Si p = 0 $a_{2\times 0} = a0 = 1 = \left(\frac{1}{6}\right)^0$ et $a_{2\times 0+1} = a_1 = 0$.

Hérédité : Si $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$ alors :

$a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{1}{6} a_{2p} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p = \left(\frac{1}{6}\right)^{p+1}$ et $a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = \frac{1}{6} \times a_{2p+1} = 0$. la propriété est bien vérifiée pour p + 1.

Conclusion : Pour tout entier naturel p, $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$

On démontrer que pour tout entier naturel p, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p$

On a vu que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ on a donc :

$b_{2p} = \frac{1}{3} a_{2p-1} = \frac{1}{3} \times 0 = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{1}{2} a_{2p} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^p$

3° Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers + ∞ .

$\left|\frac{1}{6}\right| \leq 1$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^p = 0$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} a_{2p} = 0$. On a aussi $\lim\limits_{p \to +\infty} a_{2p+1} = \lim\limits_{p \to +\infty} 0 = 0$. On peut donc dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - a_n - b_n) = 1$.