Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

Définition : H est une primitive de h sur un intervalle I si et seulement si H est dérivable sur I et si pour tout x de I on a H '(x) = h(x).

Dans la suite on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \ln(t^2 + 1)$.

1° Expliquer pourquoi f est continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

2° Montrer que f est croissante sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

La fonction f est représentée ci-dessous :

Pour $\alpha > 0$, on note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$.

3° Soit x_0 un réel strictement positif.

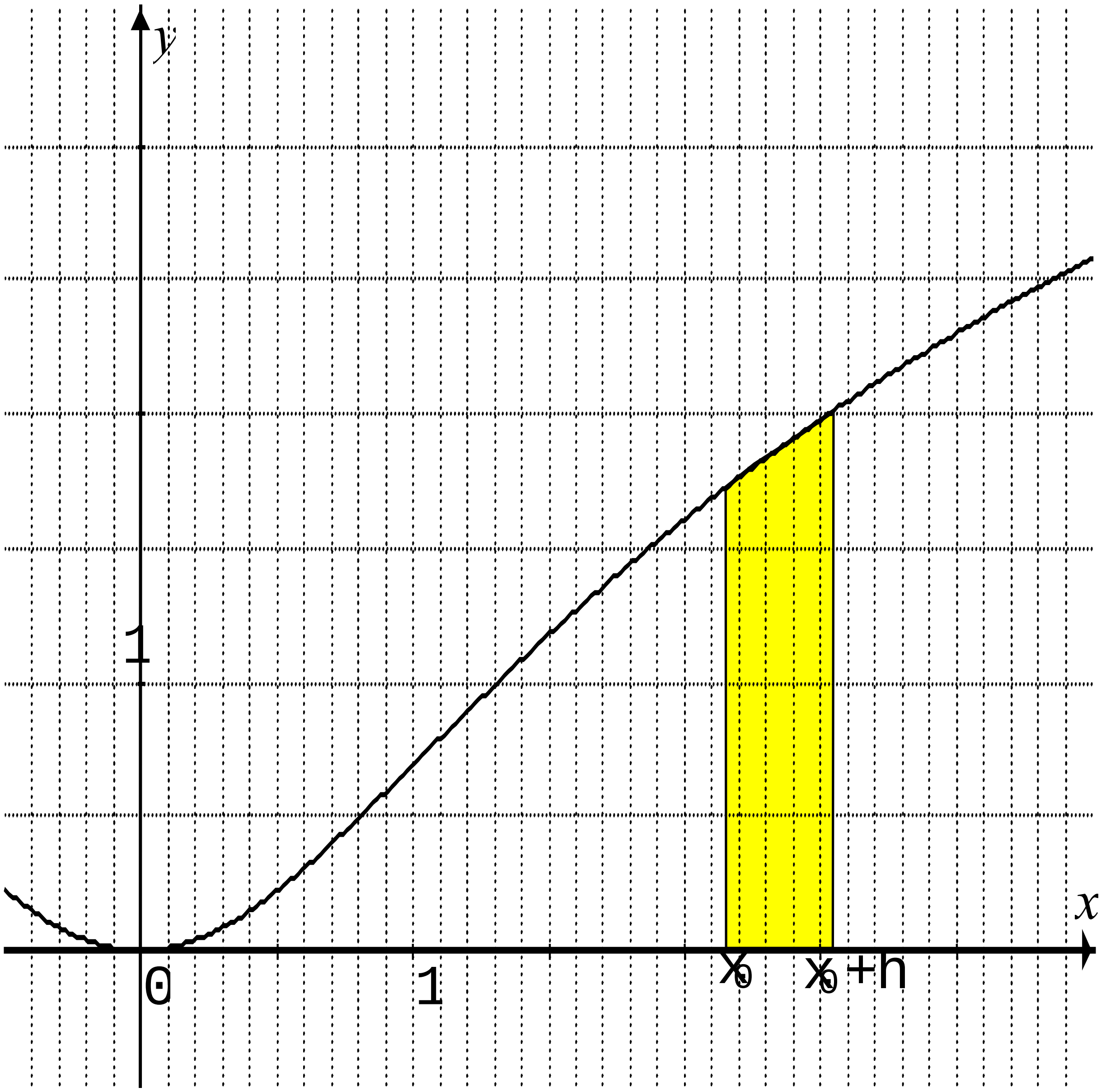
a) Soit h un réel strictement positif . En utilisant des rectangles convenablement choisis, établir l'encadrement :

$$\ln(1 + x_0^2) \leq \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leq \ln(1 + (x_0 + h)^2)$$

b) Quel encadrement peut on obtenir de la même manière pour $-x_0 \leq h < 0$?

c) Démontrer que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de A en x_0 ?

4° Quel lien a-t-on établi entre les fonctions $\mathscr{A}$ et f sur $]\,0\,,+\infty\,[$?



1° $f : t \longmapsto t^2 + 1 \longmapsto \ln(t^2 + 1)$ est la composée de deux fonctions continues donc f est continue.
$t \longmapsto t^2 + 1$ continue sur $[0, +\infty[$. $t^2 + 1 > 0$ et $x \longmapsto \ln x$ continue sur $]0, +\infty[$ donc f continue sur $[0 ; +\infty[$
2° $t \longmapsto t^2 + 1$ croissante sur $[0, +\infty[$. $t^2 + 1 > 0$ et $x \longmapsto \ln x$ croissante sur $]0, +\infty[$ donc f croissante sur $[0, +\infty[$
3° L'aire de la partie coloriée est égale à : $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$
Aire du grand rectangle : $f(x_0 + h) \times (x_0 + h - x_0)$
Aire du petit rectangle : $f(x_0) \times (x_0 + h - x_0)$
Remarque f est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $f(x_0) \le f(x_0 + h)$
On a donc $f(x_0) \times h \le \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \le f(x_0 + h)$
donc $\ln(1 + x_0^2) \times h \le \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \le \ln(1 + (x_0 + h)^2) \times h$
donc $\ln(1 + x_0^2) \le \dfrac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \le \ln(1 + (x_0 + h)^2)$
b) Aire du grand rectangle : $f(x_0) \times (x_0 - (x_0 - h))$
Aire du petit rectangle : $f(x_0 - h) \times (x_0 - (x_0 - h))$
donc : $\ln(1 + (x_0 - h)^2) \times h \le \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 - h) \le \ln(1 + x_0^2) \times h$
donc : $\ln(1 + (x_0 - h)^2) \le \dfrac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 - h)}{h} \le \ln(1 + x_0^2)$
c) $\lim\limits_{h \to 0^+} \ln(1 + (x_0 + h)^2) = \lim\limits_{h \to 0^+} \ln(1 + x_0^2) = \ln(1 + x_0^2)$
donc $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \ln(1 + x_0^2)$
$\lim\limits_{h \to 0^+} \ln(1 + (x_0 - h)^2) = \ln(1 + x_0^2)$ donc
$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 - h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = \ln(1 + x_0^2)$
La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{A}'(x_0) = \ln(1 + x_0^2)$
4° $\forall x \in [0, +\infty[$, $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ donc $\mathcal{A}$ est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.