France Juin 2005

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $U_n - V_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (U_n) et $(V_{n,})$ sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à N, on a $U_n \leq V_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (U_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $V_n = \dfrac{-2}{U_n}$

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si (U_n) est convergente, alors (V_n) est convergente.

2) Si (U_n) est minorée par 2, alors (V_n) est minorée par -1.

3) Si (U_n) est décroissante, alors (V_n) est croissante.

4) Si (U_n) est divergente, alors (V_n) converge vers zéro.

EXERCICE 1 (4 points) Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.
Partie A : question de cours On suppose connus les résultats suivants : (1) deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $U_n - V_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; (2) si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à N, on a $U_n \leq V_n$; (3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente. Démontrer alors la proposition suivante :
« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

D'après (2) on a pour tout entier n , $U_n \leq V_n$
Comme (U_n) est croissante on a pour tout entier n , $U_0 \geq U_n$
On a donc pour tout entier n , $U_0 \leq U_n \leq V_n$.
La suite (V_n) est décroissante et minorée par U_0 elle est donc convergente vers un limite finie ℓ
On démontre de même que pour tout entier n, $U_n \leq V_0$ 0,5
La suite (U_n) est croissante et majorée par V_0 elle est donc convergente vers un limite finie ℓ'

On sait que $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell' \\ \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \ell\end{array}\right\}$ on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n - V_n = \ell' - \ell = 0$.

Les suite (U_n) et (V_n) converge donc vers la même limite

Partie B

On considère une suite (U_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $V_n = \dfrac{-2}{U_n}$

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si (U_n) est convergente, alors (V_n) est convergente. $\boxed{\text{C'est faux}}$

Contre-exemple : La suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0^+ alors la suite (V_n) diverge vers $-\infty$.

2) Si (U_n) est minorée par 2, alors (V_n) est minorée par – 1. $\boxed{\text{C'est vrai}}$

On a pour tout entier n, $U_n \geq 2 > 0$
donc comme la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ on peut dire que : $\dfrac{1}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}$
alors en multipliant par $-2 < 0$ on obtient :
$-2 \times \dfrac{1}{U_n} \geq -2 \times \dfrac{1}{2}$ c'est à dire $V_n \geq -1$
La suite (V_n) est donc minorée par – 1

3) Si (U_n) est décroissante, alors (V_n) est croissante. $\boxed{\text{C'est faux}}$

Par exemple la suite (U_n) définie par : $U_n = -n-1$ est décroissante.
La suite (V_n) est alors définie par : $V_n = \dfrac{-2}{-n-1} = \dfrac{2}{n+1}$
elle est donc décroissante.

4) Si (U_n) est divergente, alors (V_n) converge vers zéro. $\boxed{\text{c'est faux.}}$

Un suite divergente n'admet pas toujours une limite infinie.
Par exemple la suite (U_n) est définie par : $U_n = (-1)^n$ est divergente
La suite (V_n) est alors telle que pour tout entier n, $V_n = \dfrac{-2}{(-1)^n}$
La suite (V_n) est divergente