Liban 2004

a) $\mathscr{P}(n) : \dfrac{k^n}{n\,!} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$

b) Initialisation : Si n = k on a : $\dfrac{k^n}{n\,!} = \dfrac{k^k}{k\,!}$. donc $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq k$.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vérifié alors $\dfrac{k^n}{n\,!} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$

On a donc : $\dfrac{k^{n+1}}{(n+1)\,!} = \dfrac{k^n \times k}{(n+1) \times n\,!} = \dfrac{k^n}{n\,!} \times \dfrac{k}{n+1}$

$\dfrac{k^n}{n\,!} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$ donc $\dfrac{k^n}{n\,!} \times \dfrac{k}{n+1} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$ car $0 < \dfrac{k}{n+1} \leq 1$

On a donc bien : $\dfrac{k^{n+1}}{(n+1)\,!} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifié.

Conclusion : $\forall\, n \geq k, \dfrac{k^n}{n\,!} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$

b) On a : $\dfrac{k^n}{n\,!} \times \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = \dfrac{k^n}{n\,!} \times \dfrac{x^n}{k^n} = \dfrac{x^n}{n\,!}$.

On sait que : $\dfrac{k^n}{n\,!} \leq \dfrac{k^k}{k\,!}$ donc $\dfrac{k^n}{n\,!} \times \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \leq \dfrac{k^k}{k\,!} \times \left(\dfrac{x}{k}\right)^n$ car $\left(\dfrac{x}{k}\right)^n > 0$

On a donc bien : $\dfrac{x^n}{n\,!} \leq \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k\,!}$

c) Pour tout réel x positif et strictement supérieur à k on a $\left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = 0$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k\,!} = 0$.

$0 \leq \dfrac{x^n}{n\,!} \leq \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k\,!}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k\,!} = 0$. D'après le théorème des gendarmes on peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n\,!} = 0$.

2° a) $\dfrac{n^{n-1}}{n\,!} = \dfrac{n}{n} \times \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n}{n-2} \times \ldots. \times \dfrac{n}{2}$ (n – 1 facteurs)

pour tout entier i on a : $\dfrac{n}{i} \geq 1$ donc : $\dfrac{n}{n} \times \dfrac{n}{n-1} \times \dfrac{n}{n-2} \times \ldots. \times \dfrac{n}{2} \geq 1 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1$ (n – 1 facteurs)

On a bien : $\dfrac{n^{n-1}}{n\,!} \geq 1$.

b) $\dfrac{n^{n-1}}{n\,!} \times n = \dfrac{n^n}{n\,!} \geq n$. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. d'après les théorème de comparaison de limites on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{n\,!} = +\infty$.