Polynésie juin 2005 Exercice 3 (7 points)

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x + \ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ du plan.

1° a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

2° a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]\,0\,;+\infty\,[$.

On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b) Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c) Préciser la valeur de α_1.

d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3° a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $h(x) = \ln x - x + 1$.

En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

c) Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

4° Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et telle que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir sur $\mathbb{N}$ une suite β_n de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1° Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2° Montrer que la suite β_n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

Partie A On considère la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par f (x) = x +ln x. On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan.

1° a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to 0^+} x + \ln x = -\infty .$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln x = +\infty .$$

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

f est la somme de deux fonctions dérivables sur] 0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur] 0 ; + ∞ [

Pour tout réel x de] 0 ; + ∞ [, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

Donc f est croissante sur] 0 ; + ∞ [

2° a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation f (x) = n admet une unique solution dans] 0 ; + ∞ [.
On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

f est continue et strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc f est une bijection de] 0 ; + ∞ [sur ℝ.

Donc pour tout entier naturel n, l'équation f(x) = n a une solution unique que l'on note α_n

b) Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c) Préciser la valeur de α_1.

Sur le graphique on voit que f(1) semble être égale à 1. f(1) = 1 + ln 1 = 1

Donc 1 est la solution cherchée et $\alpha_1 = 1$

d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

$f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n + 1$ donc $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$ donc, comme la fonction f est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, on peut dire que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. la suite (α_n) est donc bien strictement croissante.

3° a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

$f(1) = 1 - \ln 1 = 1 \quad f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$

On sait que l'équation de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse x_0 est : $y = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$

L'équation de la tangente est donc : y = 1 + 2 (x – 1) c'est à dire y = 2 x – 1

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur] 0 ; + ∞ [par h(x) = ln x − x +1.
En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

h est la somme de fonctions dérivable sur] 0 ; + ∞ [elle est donc dérivable sur] 0 ; + ∞ [.

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$

x est toujours strictement positif donc h'(x) est du signe de 1 –x.

D'après les variations de h h(1) 'est la maximum de f sur] 0 ; + ∞ [on peut dire que : pour tout réel x de] 0 ; + ∞ [, h(x) ≤ 0.

f(x) – (2 x – 1) = x + ln x – 2 x + 1 = h(x).

On a donc, pour tout réel x de] 0 ; + ∞ [, f(x) – (2 x – 1) ≤ 0

Sur] 0 ; + ∞ [Γ est donc au-dessous de Δ

x	0		1		+∞
h'(x)	‖	+	0	−	
h	‖	↗	0	↘	

c) Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

On sait que $h(\alpha_n) \leq 0$ donc $\ln \alpha_n - \alpha_n + 1 \leq 0$ donc $n - \alpha_n + 1 \leq 0$ donc $\alpha_n \geq n + 1 \geq \frac{n+1}{2}$

4° Déterminer la limite de la suite (α_n).

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha n = +\infty$

Partie B On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$ et telle que $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir sur $\mathbb{N}$ une suite β_n de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante. 1° Démonstration de cours : Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$. « Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Soit (U_n) une suite croissante non majorée.

Soit un réel A quelconque.

La suite (U_n) n'est pas majorée par A donc il existe un entier n_0 tel que $U_{n_0} \geq A$

La suite (U_n) est croissante donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , $U_n \geq U_{n_0} \geq A$

Donc à partir du rang n_0 tous les termes de la suite sont donc supérieur à A

Pour tout réel A, à partir d'un certain rang (le rang n_0) tous les termes de la suite sont donc supérieur à A

Donc, par définition, $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

2° Montrer que la suite β_n tend vers $+\infty$.

La suite (β_n) est croissante (la démonstration est la même que celle de la question 2° d).

Démonstration par l'absurde.

Si la suite (β_n) est majorée, alors, comme elle est croissante; elle est aussi convergente vers un réel ℓ .

On a $\lim_{n \to +\infty} g(\beta_n) = g(\ell)$ car la fonction g est continue en ℓ

On sait que pour tout entier naturel n $g(\beta_n) = n$ donc $\lim_{n \to +\infty} g(\beta_n) = +\infty$ ce qui est en contracdiction avec le résultat trouvé.

La suite (β_n) est n'est donc pas majorée. Comme elle est aussi croissante on a bien $\lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$.

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3