Amérique du sud novembre 2004 7 points

Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par : $f(x) = x\, e^{-x}$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1° a) Déterminer la limite de f en + ∞.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Construire Γ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

2° a) Montrer que, pour tout réel m de $\left]0 , \frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

1° On considère la suite (un) définie sur ℕ par :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = U_n\, e^{-U_n} \text{, pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question A. 2° b)

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c. La suite (un) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (W_n) définie sur N par $W_n = \ln U_n$.

a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $U_n = W_n - W_{n+1}$.

b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Montrer que $S_n = W_0 - W_{n+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3 On considère la suite (V_n) définie sur ℕ par son premier terme V_0 $(V_0 > 0)$ et, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n\, e^{-V_n}$.

Existe-t-il une valeur de V_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $U_n = V_n$?

Si oui, préciser laquelle.

CORRECTION

Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par : f (x) = x e^{-x} . On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) (unité graphique : 10 cm). Partie A 1° a) Déterminer la limite de f en + ∞.

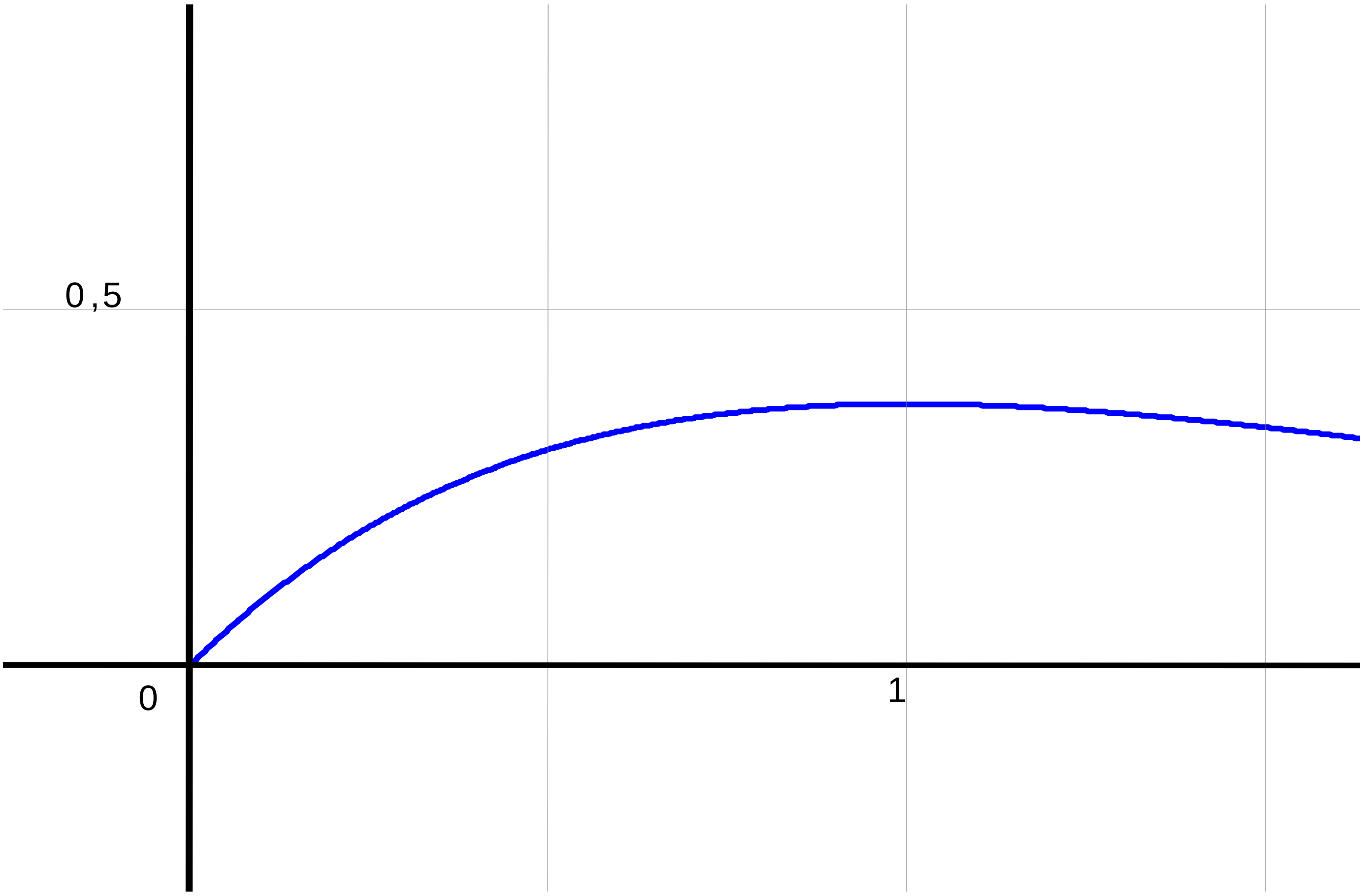
$x\,e^{-x} = \frac{x}{e^x}$ On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

x	0		1		+∞
signe de f '		+	0	−	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

f est le produit de deux fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [,
elle est donc dérivable sur [0 ; + ∞ [.
$f'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)\,e^{-x}$.
Pour tout réel x on sait que e^{-x} est positif donc f'(x) est du signe de 1 − x.

c) Construire Γ dans le repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).



2° a) Montrer que, pour tout réel m de] 0 , $\frac{1}{e}$ [, l'équation f (x) = m admet deux solutions.

La fonction f est continue et strictement croissante sur [0 , 1] ; f(0) = 0 et $f(1) = \frac{1}{e}$ donc pour tout réel m de]0 , $\frac{1}{e}$ [l'équation f(x) = m admet une solution unique dans l'intervalle [0 , 1].

La fonction f est continue et strictement décroissante sur] 1 , + ∞ [; $f(1) = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc pour tout réel m de]0 , $\frac{1}{e}$ [l'équation f(x) = m admet une solution unique dans l'intervalle] 1 , + ∞ [.

b) Dans le cas où m = $\frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec α < β). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Si $m = \frac{1}{4}$ alors α est la solution de l'équation dans l'intervalle] 0 , 1 [$0{,}35 \le \alpha \le 0{,}36$

c) Résoudre l'équation f (x) =m dans le cas où m =0 et m = $\frac{1}{e}$.

Si m = 0 l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans [0 , 1] et pas de solution dans] 1 + ∞ [La seule solution est alors 0. f(0) = 0.

Si m = $\frac{1}{e}$ l'équation f(x) = $\frac{1}{e}$ n'admet qu'une solution dans] 0 ; + ∞ [c'est x = 1.

Partie B 1° On considère la suite (U_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = U_n\, e^{-U_n} \text{, pour tout entier naturel } n \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2° b) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

Initialisation : On sait que $\alpha \in]\,0\,,1\,[$ donc $U_0 = \alpha > 0$.

Hérédité : Si $U_n >$ alors, comme $e^{-U_n} > 0$ donc $U_{n+1} = U_n\, e^{-U_n} > 0$

Conclusion : On a u0> 0 et pour tout entier naturel n : $U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$ d'après le principe de récurrence on peut donc dire que : pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

$U_{n+1} - U_n = U_n\,(e^{-U_n} - 1)$. Pour tout entier naturel n on a démontré que $U_n > 0$ donc $e^{-U_n} < 1$ et $U_{n+1} - U_n < 0$.

c) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

La suite (U_n) est minorée et décroissante elle est donc convergente.

Soit ℓ sa limite on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n\, e^{-U_n} = \ell\, e^{\ell}$ car la fonction f est continue en ℓ.

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell\, e^{-\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell\, e^{-\ell} - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell\,(e^{-\ell} - 1) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.

2° On considère la suite (W_n) définie sur N par $W_n = \ln U_n$. a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $U_n = W_n - W_{n+1}$.

$W_n - W_{n+1} = \ln(U_n) - \ln(U_{n+1}) = \ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-U_n}}\right) = U_n$

b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$. Montrer que $S_n = W_0 - W_{n+1}$.

$S_n = W_0 - W_1 + W_1 - W_2 + \ldots + W_{n-1} - W_n + W_n - W_{n+1} = W_0 - W_{n+1}$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(U_n) = \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (W_0 - W_{n+1}) = +\infty$.

3° On considère la suite (V_n) définie sur ℕ par son premier terme V_0 ($V_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n\, e^{-V_n}$. Existe-t-il une valeur de V_0 différente de α telle que, pour tout n ≥ 1, on ait $U_n = V_n$? Si oui, préciser laquelle.

$f(U_0) = V_1 = U_1 = f(\alpha)$. $\alpha \in]\,0\,,1\,[$ donc $f(\alpha) \in \left]\,0\,,\frac{1}{e}\right[$ et l'équation $f(V_1) = f(\alpha)$ admet deux solutions α et β.

$V_1 = U_1 \Leftrightarrow V_0 = \alpha$ ou $V_0 = \beta$.

Si on prend $V_0 = b$ alors $V_1 = U_1$ et on démontre par récurrence que pour tout entier naturel n ≥ 1 $U_n = V_n$

Initialisation $V_1 = u1$

Hérédité : si $V_n = un$ alors $f(U_n) = f(V_n)$ alors $V_{n+1} = U_{n+1}$.

Conclusion : $V_1 = U_1$ et $V_n = U_n \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1}$