$\boxed{5}$ Méthode de Héron : Approximation de la racine carré d'un entier par la méthode de Héron.

Soit p un entier naturel non nul et soient les suites (U_n) et (V_n) et définies par récurrence par

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ V_n = \dfrac{p}{U_n} \text{ et } U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \text{Où } \alpha \text{ est un réel strictement positif}$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers $\sqrt{p}$.

On pourra étudier les variations de la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + p}{2\,x}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n \le \sqrt{p}$

correction

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - U_n = \frac{U_n + V_n - 2\,U_n}{2} = \frac{V_n - U_n}{2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{p}{U_{n+1}} - \frac{p}{U_n} = \frac{p\,U_n - p\,U_{n+1}}{U_n\,U_{n+1}} = \frac{p}{U_n\,U_{n+1}}(U_n - U_{n+1})$$

$$U_n - V_n = U_n - \frac{p}{U_n} = \frac{U_n^{\,2} - p}{U_n}$$

x	0		$\sqrt{p}$		$+\infty$
signe de f '		$-$	0	$+$	
f		$+\infty$	$\sqrt{p}$		0

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + p}{2\,x}$

$$f\,'(x) = \frac{2\,x \times x - (x^2 + p) \times 1}{2\,x^2} = \frac{x^2 - p}{2\,x^2}$$

$$f\left(\sqrt{p}\right) = \frac{p + p}{2\sqrt{p}} = \sqrt{p}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \ge \sqrt{p}$

Démontrons par récurrence que pour tout entier n différent de 0 : $\mathscr{P}(n)$ $U_n \ge \sqrt{p}$

Initialisation $\mathscr{P}(1)$: $U_1 = f(U_0)$ et $U_0 = \alpha > 0$ donc $U_1 \ge \sqrt{p}$

Hérédité : Si $\mathscr{P}(n)$ vrai alors $U_n \ge \sqrt{p} > 0$ donc $f(U_n) \ge \sqrt{p}$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifié.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \ge \sqrt{p}$

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n^{\,2} - p \ge 0$ et $U_n \ge 0$ donc $U_n - V_n = \dfrac{U_n^{\,2} - p}{U_n} \ge 0$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2} \le 0$$

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{p}{U_n\,U_{n+1}}(U_n - U_{n+1}) \ge 0$ car $\dfrac{p}{U_n\,U_{n+1}} \ge 0$ et $U_n - U_{n+1} \ge 0$

la suite (U_n) est donc décroissante et minorée par $\min(\sqrt{p}\,,\alpha)$ donc elle est convergente.

la suite (V_n) est croissante et majorée par $\max(\sqrt{p}, \alpha)$ donc elle est converge.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ On a donc : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(\ell)$ donc

$\dfrac{\ell^2 + p}{2\,\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^{\,2} + p = 2\,\ell^{\,2} \Leftrightarrow \ell^{\,2} = p \Leftrightarrow \ell = \sqrt{p}$ car $\ell \ge 0$.

$V_n = \dfrac{p}{U_n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \dfrac{p}{\ell} = \dfrac{p}{\sqrt{p}} = \sqrt{p}$

la suite (U_n) est donc décroissante, la suite (V_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ donc les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.