

Liban juin 2005 Exercice 3 (8 points)

Partie A On considère la suite (U_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1° Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0, 1]$.

En déduire la valeur de U_1 .

2° Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$U_{n+1} = (n+1)U_n - 1 \quad (\text{R})$$

Partie B On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (U_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de U_n affichée par la première calculatrice	Valeur de U_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845 E - 01	7,1828182846 E - 01
2	4,3656365691 E - 01	4,3656365692 E - 01
3	3,0969097075 E - 01	3,0969097076 E - 01
4	2,3876388301 E - 01	2,3876388304 E - 01
5	1,9381941508 E - 01	1,9381941520 E - 01
6	1,6291649051 E - 01	1,6291649120 E - 01
7	1,4041543358 E - 01	1,4041543840 E - 01
8	1,2332346869 E - 01	1,2332350720 E - 01
9	1,0991121828 E - 01	1,0991156480 E - 01
10	9,9112182825 E - 02	9,9115648000 E - 01
11	9,0234011080 E - 02	9,0272128000 E - 02
12	8,2808132963 E - 02	8,3265536000 E - 02
13	7,6505728522 E - 02	8,2451968000 E - 02
14	7,1080199309 E - 02	1,5432755200 E - 01
15	6,6202989636 E - 02	1,3149132800 E + 00
16	5,9247834186 E - 02	2,0038612480 E + 01
17	7,2131811612 E - 03	3,3965641216 E + 02
18	- 8,7016273909 E - 01	6,1128154189 E + 03
19	- 1,7533092042 E + 01	1,1614249296 E + 05
20	- 3,5166184085 E + 02	2,3228488592 E + 06
21	- 7,3858986580 E + 03	4,8779825043 E + 07
22	- 1,6249077047 E + 05	1,0731561499 E + 09
23	- 3,7372887209 E + 06	2,4682591448 E + 10
24	- 8,9694930302 E + 07	5,9238219474 E + 11
25	- 2,2423732585 E + 09	1,4809554869 E + 13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (U_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (U_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

1° Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

2° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \frac{e}{n+1}$

3° Déterminer la limite de la suite (U_n)

Partie D Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (U_n)

$$U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$$

Etant donné un réel a , on considère la suite (V_n) définie par :

$$V_1 = a \text{ et pour tout entier naturel non nul, } n : V_{n+1} = (n+1)V_n - 1$$

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$V_n = U_n + (n!) (a + 2 - e) \text{ où } n! \text{ désigne le produit des } n \text{ premiers entiers naturels non nuls.}$$

Etudier le comportement de la suite (V_n) à l'infini suivant les valeurs de a .

On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$

En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

Exercice 3 (8 points)

Partie A On considère la suite (U_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1° Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t) e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t) e^t$ sur $[0, 1]$. En déduire la valeur de U_1 .
 $f'(t) = -1 \times e^t + (2-t) e^t = (-1+2-t) e^t = g(t)$

2° Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $U_{n+1} = (n+1) U_n - 1$ (R)

$$U_1 = \int_0^1 (1-t) e^t dt = [f(t)]_0^1 = (2-1) e^1 - (2-0) e^0 = e - 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = (1-t)^n \text{ et } u'(t) = -n(1-t)^{n-1} \\ v'(t) = e^t \text{ et } v(t) = e^t \end{array} \right\} \text{ donc } \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = [(1-t)^n e^t]_0^1 - \int_0^1 (-n(1-t)^{n-1}) e^t dt$$

$$\text{Donc } U_n = (1-1) e^1 - (1-0) e^0 + n U_{n-1} = -1 + n U_{n-1}$$

Partie B On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (U_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices : Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (U_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

D'après la première calculatrice $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ et d'après la seconde $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

partie C Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (U_n) à partir de la définition : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$. 1° Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

$$\forall x \in [0, 1], 1-t \geq 0 \text{ donc } (1-t)^n \geq 0 \text{ donc } (1-t)^n e^t \geq 0$$

$$\text{On a donc pour tout entier } n, \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0.$$

2° a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel non nul $n : (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$
 $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^t \leq e^1$

En multipliant par $(1-t)^n$ qui est positif on obtient

$$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \frac{e}{n+1}$

On intègre les inégalité sur l'intervalle $[0, 1]$ on obtient : $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e dt$

$$\int_0^1 (1-t)^n e dt = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \times e \right]_0^1 = \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} \times e - \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1} \times e = \frac{e}{n+1}$$

$$\text{Donc pour tout entier } n : U_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3° Déterminer la limite de la suite (U_n)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ et pour tout entier $n, 0 \leq U_n \leq \frac{e}{n+1}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Partie D Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (U_n) $U_{n+1} = (n+1) U_n - 1$ Etant donné un réel a , on considère la suite (V_n) définie par : $V_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul, $n : V_{n+1} = (n+1) V_n - 1$

1° En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$V_n = U_n + (n!) (a + 2 - e)$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

$$\mathcal{P}(n) : V_n = U_n + (n!) (a + 2 - e)$$

Initialisation : $V_1 = a$ et $U_1 + 1! \times (a + 2 - e) = e - 2 + a + 2 - e = a$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée alors $V_n = U_n + (n!) (a + 2 - e)$

$$V_{n+1} = (n+1) V_n - 1 = (n+1) \times (U_n + (n!) (a + 2 - e)) - 1 = (n+1) U_n + (n+1) \times (n!) (a + 2 - e) - 1$$

On sait que pour tout entier n ,

$$U_{n+1} = (n+1) U_n - 1 \text{ donc } V_{n+1} = (n+1) \times (n!) (a + 2 - e) = ((n+1)!) (a + 2 - e)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

2° Etudier le comportement de la suite (V_n) à l'infini suivant les valeurs de a . On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ on a donc

Si $a + 2 - e = 0$ c'est à dire $a = e - 2$ et pour tout entier n $V_n = U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

Si $a + 2 - e \leq 0$ c'est à dire $a \leq e - 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$

Si $a + 2 - e = 0$ c'est à dire $a \geq e - 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

3° En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

la première calculatrice a utilisé une valeur approchée de $2 - e$ par défaut et la seconde une valeur approchée par excès