Baccalauréat S La Réunion juin 2004 EXERCICE 1 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = 1 - x^2 e^{1-x2}$.

Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f (x)	1	↘	0	↗	1

Sa courbe représentative C et son asymptote Δ, d'équation y = 1, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1° k est un nombre réel donné.

En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle [0; +∞[de l'équation f (x) = k.

2° n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1° Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions U_n et V_n respectivement comprises dans les intervalles [0 ; 1] et [1 ; +∞[.

2° Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels U_n et V_n pour n appartenant à l'ensemble {2 ; 3 ;4}.

3° Déterminer le sens de variation des suites (U_n) et (V_n).

4° Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Procéder de même pour la suite (V_n). En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

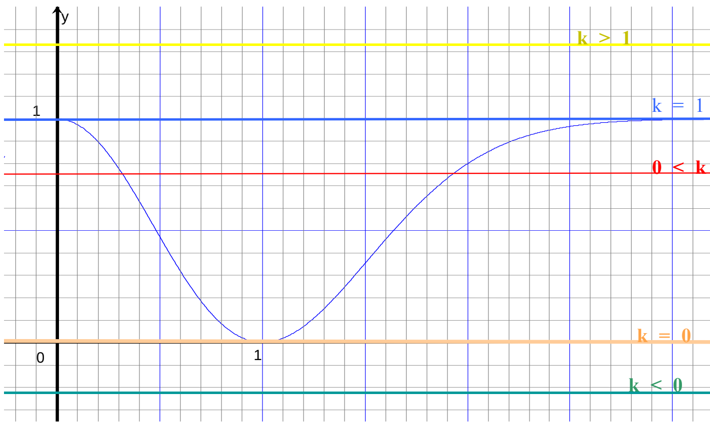
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}$.
Son tableau de variations est le suivant :

x	0	1	+∞
f (x)	1 ↘	0	↗ 1

Sa courbe représentative C et son asymptote Δ, d'équation y = 1, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1° k est un nombre réel donné.
En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle [0; +∞[de l'équation f (x) = k.



$k < 0$ pas de solution
$k = 0$ une solution
$0 < k < 1$ deux solutions
$k = 1$ une solution
$k > 1$ pas de solution

2° n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

$0 < \frac{1}{n} < 1$ si et seulement si $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

B - Définition et étude de deux suites 1° Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions U_n et V_n respectivement comprises dans les intervalles [0 ; 1] et [1 ; +∞[.

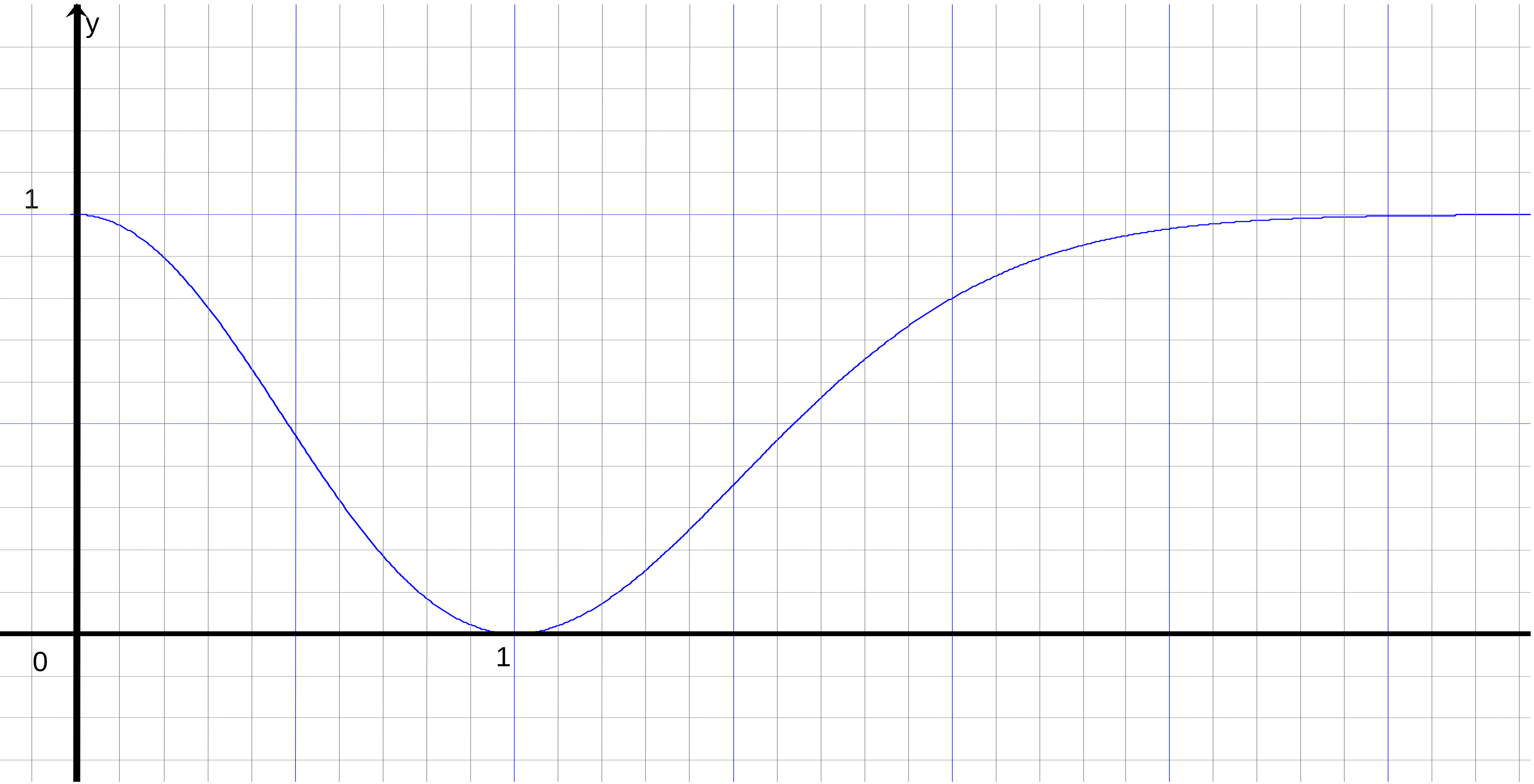
La fonction f est strictement décroissante et continue sur] 0 ; 1], f(0) = 1 et f(1) = 0.
$\frac{1}{n} \in$] 0 , 1 [donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution U_n et une seule dans [0 , 1 [
La fonction f est strictement croissante et continue sur] 1 ; + ∞ [, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et f(1) = 0.
$\frac{1}{n} \in$] 0 , 1 [donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution V_n et une seule dans] 1 , + ∞ [

2° Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels U_n et V_n pour n appartenant à l'ensemble {2 ; 3 ;4}.
3° Déterminer le sens de variation des suites (U_n) et (V_n).

$f(U_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et $f(U_n) = \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(U_{n+1}) < f(U_n)$.
Comme U_n et U_{n+1} sont dans] 0 , 1 [et comme f est décroissante sur] 0 ; 1 [, on a $U_{n+1} > U_n$
La suite (U_n) est donc croissante
$f(V_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et $f(V_n) = \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(V_{n+1}) < f(V_n)$.
Comme V_n et V_{n+1} sont dans] 1 , + ∞ [et comme f est croissante sur] 1 ; + ∞ [, on a $V_{n+1} < V_n$
La suite (V_n) est donc décroissante.

4° Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
Procéder de même pour la suite (V_n). En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

La suite (U_n) est croissante et majorée par 1 elle est donc convergente. Soit l sa limite.
$\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \ell$ et f est continue en ℓ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(U_n) = f(\ell) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
ℓ est la solution de l'équation f(x) = 0 donc $\ell = 1$.
De même la suite (V_n) est décroissante et minorée par 1 elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite.
$\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = \ell$ et f est continue en ℓ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(V_n) = f(\ell) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
ℓ est la solution de l'équation f(x) = 0 donc $\ell = 1$.
(U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n - V_n = 0$ les suites (U_n) et (V_n) sont donc adjacentes.


y
1
0
1