$\boxed{1}$ Soit (U_n) une suite. On considère les propriétés suivantes :		
– P1 la suite (U_n) est majorée ;	– P2 la suite (U_n) n'est pas majorée ;	– P3 la suite (U_n) converge;
– P4 la suite (U_n) tend vers $+\infty$;	–°P5 la suite (U_n) est croissante.	

1° Donner la traduction mathématique de la propriété P1.
2° Si les propriétés P1 et P5 sont vraies, que peut-on en conclure pour $(U_n$
3° Si les propriétés P2 et P5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (U_n)
4° Une suite vérifiant la propriété P4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P2

$\boxed{2}$ **Partie A Démonstration de cours.**

Soit (U_n) une suite croissante non majorée
1° Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $U_{n_0} > M$
Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geq n_0$ alors $U_n > M$.
2° Quelle conséquence peut-on en tirer pour la suite (U_n) ?
3° Enoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes :
a) Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
b) Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
c) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
d) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

$\boxed{3}$ Soit (U_n) une suite telle que les suites de terme général $V_n = 1 + U_n$ et $W_n = 3 - U_n$ soient adjacentes.
Etudier la convergence de la suite (U_n), et préciser, le cas échéant, sa limite.

$\boxed{4}$ **Moyenne arithmético-géométrique**

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$a_0 = a$; $b_0 = b$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

$\boxed{5}$ 1° Question avec prise d'initiative.

Sans utiliser la calculatrice comparer les nombres : $A = \dfrac{\ln 2}{2}$ et $B = \dfrac{\ln 3}{3}$

2° Une démonstration du résultat : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

a) Question de cours.
En utilisant le fait que la fonction logarithme transforme les produits en sommes, démontrer que pour tout réel x strictement positif : $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$

b) Démontrer que pour tout réel u strictement positif : $\ln u < u$
c) En déduire que pour tout réel x strictement positif : $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$
puis que pour tout réel x de $]\,1, +\infty\,[$: $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ d) Conclure.

3° Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe C de la fonction logarithme népérien.
On note, pour tout entier naturel n strictement positif, An le point de coordonnées $(n, \ln n)$
a) Calculer le coefficient directeur de la droite (OA_n), que l'on notera U_n .
b) Question avec prise d'initiative.
Démontrer que la suite (U_n) est décroissante à partir d'un rang que l'on précisera.
c) Etudier la limite de la suite (U_n).
4° Maintenant, on note (V_n) la suite définie, pour n strictement positif par : $V_n = A_nA_{n+1}$
a) Etudier le sens de variation de la suite (V_n).
b) Etudier la limite de la suite (V_n).

MINI FORMULAIRE

On supposera acquises les propriétés suivantes :

- La fonction ln est la réciproque de la fonction exponentielle
- ln 1 = 0, ln e = 1
- La fonction ln est strictement croissante sur]0, +∞[
- La fonction ln transforme les produits en sommes :

pour tous réels A et B de]0, +∞[, ln(AB) = ln A + ln B

- Pour tout A de]0, +∞[et tout entier relatif p :

$\ln A^p = p \ln A$

$\boxed{1}$ Soit (U_n) une suite. On considère les propriétés suivantes :		
– P1 la suite (U_n) est majorée ;	– P2 la suite (U_n) n'est pas majorée ;	– P3 la suite (U_n) converge;
– P4 la suite (U_n) tend vers $+\infty$;	–°P5 la suite (U_n) est croissante.	
1° Donner la traduction mathématique de la propriété P1. 2° Si les propriétés P1 et P5 sont vraies, que peut-on en conclure pour $(U_n$ 3° Si les propriétés P2 et P5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (U_n) 4° Une suite vérifiant la propriété P4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P2		

1° – P1 la suite (U_n) est majorée : il existe un réel M tel que pour tout entier n $U_n \leq M$

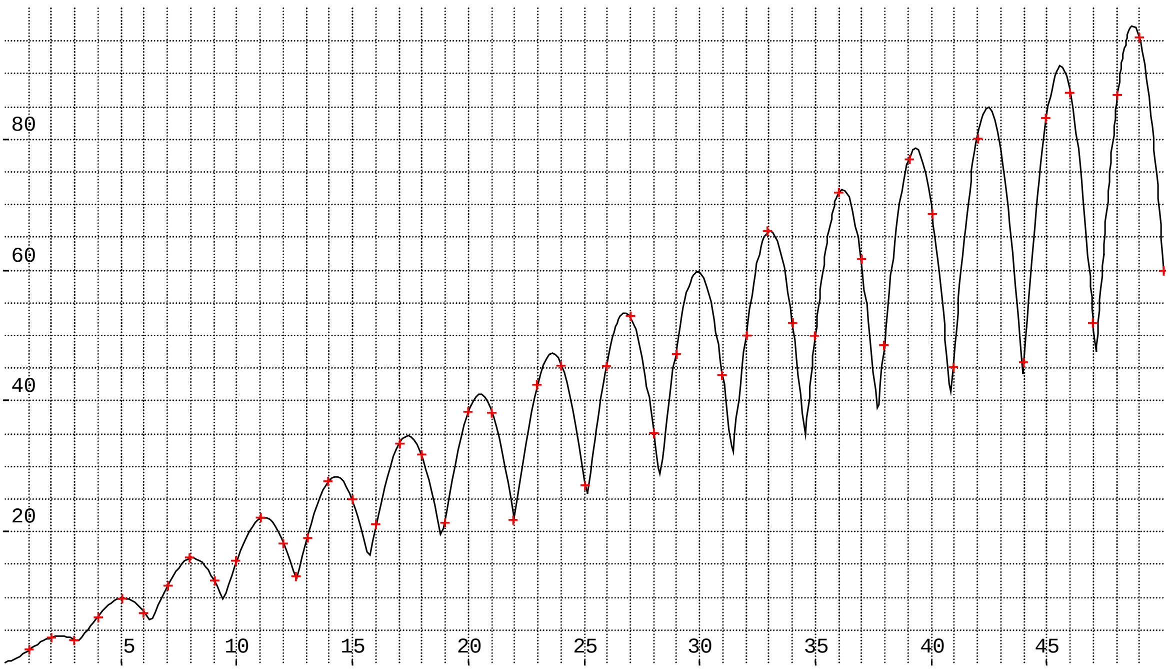
$\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$.

2° – P1 la suite (U_n) est majorée et –°P5 la suite (U_n) est croissante alors la suite (U_n) est convergente.

3° – P2 la suite (U_n) n'est pas majorée et –°P5 la suite (U_n) est croissante alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

4° Contre-exemple. $U_n = n \times (1 + |\sin n|)$.

$U_n \geq n\,(1 + 0)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et la suite (U_n) n'est ni croissante ni décroissante.



x	0		e		$+\infty$
signe de f	‖	+	0	−	
f	‖	↗		↘	

$\boxed{5}$ 1° $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$2 < e < 3$. les variations de f ne permettent pas de conclure

$A - B = \dfrac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{6} = \dfrac{\ln 2^3 - \ln 3^2}{6} = \dfrac{\ln 8 - \ln 9}{6} \leq 0$ car la fonction ln est croissante.

u	0		1		$+\infty$
signe de	‖	−	0	+	
f	‖	↗	0	↘	

2° a) $2 \ln \sqrt{x} = \ln \left(\sqrt{x}\right)^2 = \ln x$ donc $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$.

b) Soit la fonction h $u \longmapsto \ln u - u$. $h'(u) = \dfrac{1}{u} - 1 = \dfrac{u - 1}{u}$

D'après les variations de h on a :

$\forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$; $h(u) \leq 0$ donc $\forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln u \leq u$

c) $\sqrt{x} > 0$ donc $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$.

Pour tout réel $x > 1$ on a :$0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2 \ln \sqrt{x}}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ d'après le théorème des gendarme on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ cqfd

3° a) $\overrightarrow{OA_n} \begin{pmatrix} n \\ \ln n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $n\, y - x \ln n = 0$ si et seulement si $y = \dfrac{\ln n}{n} x$

Le coefficient directeur de la droite (OA_n) est $\dfrac{\ln n}{n} = U_n$.

x	0		e		$+\infty$
signe de f	‖	+	0	−	
f	‖	↗		↘	

b) On peut utiliser les variations de la fonction f étudié au 1°.

La fonction f est décroissante sur $[\, e ; +\infty\, [$ donc on a :

Pour tout entier n supérieur ou égal à e on a :

$n + 1 \geq n \geq e \Rightarrow f(n + 1) \leq f(n) \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à e on a : $U_n \geq 0$.

La suite (U_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente et sa limite est supérieure ou égale à 0.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4° $A_nA_{n+1} = \| \overrightarrow{A_nA_{n+1}} \| = \sqrt{(n + 1 - n)^2 + (\ln(n + 1) - \ln n)^2} = \sqrt{1 + \ln\left(\dfrac{n + 1}{n}\right)}$

a) Soit la fonction $k : x \longmapsto 1 + \ln\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)$

$k(x) = 1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. $\quad k : x \longmapsto \dfrac{1}{x} \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x} \longmapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \longmapsto 1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

k est la composée de 3 fonctions croissantes et une fonction décroissante elle est donc décroissante. La suite (V_n) est donc aussi décroissante.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 1 + \ln(1 + 0) = 1$