$\boxed{1}$ Soient (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{1}{2\,!} + \dfrac{1}{3\,!} + \ldots + \dfrac{1}{n\,!}$ et $V_n = U_n + \dfrac{1}{n \times n\,!}$

Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. En déduire un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de la limite commune ℓ des deux suites. Donner l'écriture fractionnaire réduite de U_p ainsi que l'approximation de U_p obtenue à l'affichage de la calculatrice.

$\boxed{2}$ On définit les suites u et v par : $U_0 = 1$; $V_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2\,V_n}{3} \ ; \ V_{n+1} = \frac{U_n + 4\,V_n}{5}$$

On pose : W= V – U. Démontrer que la suite W est géométrique. Préciser la limite de W et exprimer W_n en fonction de n. Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de W_n . En déduire le sens de variation des suites U et V. Justifier que U et V sont convergentes et ont la même limite, qui sera notée ℓ.

On pose T = 3 U + 10 V. Démontrer que la suite T est constante. En déduire la valeur de ℓ.

$\boxed{3}$ Méthode de Héron : Approximation de la racine carrée d'un entier par la méthode de Héron.

Soit p un entier naturel non nul et soient les suites (U_n) et (V_n) définies par récurrence par

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ V_n = \dfrac{p}{U_n} \text{ et } U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$ Où α est un réel strictement positif

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers $\sqrt{p}$.

On pourra étudier les variations de la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + p}{2\,x}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n \leq \sqrt{p}$

CORRECTION

$\boxed{1}$ **Soient (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \dots + \frac{1}{n\,!}$ et $V_n = U_n + \frac{1}{n \times n\,!}$**

Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. En déduire un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de la limite commune ℓ des deux suites. Donner l'écriture fractionnaire réduite de U_p ainsi que l'approximation de U_p obtenue à l'affichage de la calculatrice.

$$U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \dots + \frac{1}{n\,!} + \frac{1}{(n+1)\,!} - \left(1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \dots + \frac{1}{n\,!}\right) = \frac{1}{(n+1)\,!} \geq 0$$

donc la suite (U_n) est croissante.

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)\,!} - U_n - \frac{1}{n \times n\,!} = \frac{1}{(n+1)\,!} + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)\,!} - \frac{1}{n \times n\,!}$$

$$= \frac{1}{(n+1) \times n\,!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1) \times n\,!} - \frac{1}{n \times n\,!} = \frac{1}{n\,!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n\,!}\,\frac{n\,(n+1) + n - (n+1)^2}{n\,(n+1)^2}$$

$= \frac{1}{n\,!}\,\frac{-1}{n\,(n+1)^2} < 0$ donc la suite (V_n) est décroissante.

$V_n - U_n = U_n + \frac{1}{n \times n\,!} - un = \frac{1}{n \times n\,!}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n \times n\,!} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$.

Les suites (U_n) et (V_n) sont donc adjacentes. Elles convergent vers la même limite ℓ.

$U_6 = \frac{25033}{10800} \approx 2{,}318$

$\boxed{2}$ **On définit les suites u et v par : $U_0 = 1$; $V_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{U_n + 2\,V_n}{3}$; $V_{n+1} = \frac{U_n + 4\,V_n}{5}$**

On pose : W= V – U. Démontrer que la suite W est géométrique. Préciser la limite de W et exprimer W_n en fonction de n.
Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de W_n. En déduire le sens de variation des suites U et V. Justifier que U et V sont convergentes et ont la même limite, qui sera notée ℓ.
On pose T = 3 U + 10 V. Démontrer que la suite T est constante. En déduire la valeur de ℓ.

$$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + 4\,V_n}{5} - \frac{U_n + 2\,V_n}{3} = \frac{3\,U_n + 12\,V_n - 5\,U_n - 10\,V_n}{15} = \frac{2}{15}\,(V_n - U_n)$$

la suite (W_n) est bien géométrique de raison $\frac{2}{15}$.

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2\,V_n}{3} - U_n = \frac{U_n + 2\,V_n - 3\,U_n}{3} = \frac{2}{3}\,W_n > 0$ donc (U_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 4\,V_n}{5} - V_n = \frac{U_n + 4\,V_n - 5\,V_n}{5} = -\frac{3}{5}\,W_n < 0$ donc (V_n) est décroissante.

$\left|\frac{2}{15}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$ et on peut dire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

$3\,U_{n+1} + 10\,V_{n+1} = 3\,\frac{U_n + 2\,V_n}{3} + 10\,\frac{U_n + 4\,V_n}{5} = U_n + 2\,V_n + 2\,U_n + 8\,V_n = 3\,U_n + 10\,V_n$. la suit T est donc constante. Pour tout entier naturel n $3\,U_n + 10\,V_n = 3\,U_0 + 10\,V_0 = 23$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\,U_n + 10\,V_n = 3\,\ell + 10\,\ell$ donc $13\,\ell = 23$ donc $\ell = \frac{23}{13}$

3 Méthode de Héron : Approximation de la racine carrée d'un entier par la méthode de Héron. Soit p un entier naturel non nul et soient les suites (U_n) et (V_n) définies par récurrence par $\begin{cases} U_0 = \alpha \\ V_n = \dfrac{p}{U_n} \end{cases}$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$ Où α est un réel strictement positif

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes et qu'elles convergent vers $\sqrt{p}$. On pourra étudier les variations de la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+p}{2x}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n \leq \sqrt{p}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - U_n = \frac{U_n + V_n - 2U_n}{2} = \frac{V_n - U_n}{2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{p}{U_{n+1}} - \frac{p}{U_n} = \frac{p\,U_n - p\,U_{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \frac{p}{U_n U_{n+1}}(U_n - U_{n+1})$$

$$U_n - V_n = U_n - \frac{p}{U_n} = \frac{U_n^2 - p}{U_n}$$

x	0		$\sqrt{p}$		$+\infty$
signe de f '	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{p}$	↗	0

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} = \frac{U_n + \dfrac{p}{U_n}}{2} = \frac{U_n^2 + p}{2\,U_n} = f(U_n)$$

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+p}{2x}$

$$f'(x) = \frac{2x \times x - (x^2+p)\times 1}{2x^2} = \frac{x^2 - p}{2x^2}$$

$$f\left(\sqrt{p}\right) = \frac{p+p}{2\sqrt{p}} = \sqrt{p}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq \sqrt{p}$

On a donc pour tout entier naturel $n \geq 1$ $U_n = f(U_{n-1}) \geq \sqrt{p}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$U_n^2 - p \geq 0$ et $U_n \geq 0$ donc $U_n - V_n = \dfrac{U_n^2 - p}{U_n} \geq 0$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2} \leq 0$$

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{p}{U_n U_{n+1}}(U_n - U_{n+1}) \geq 0$ car $\dfrac{p}{U_n U_{n+1}} \geq 0$ et $U_n - U_{n+1} \geq 0$

la suite (U_n) est donc décroissante et minorée par $\min(\sqrt{p}, \alpha)$ donc elle est convergente.

la suite (V_n) est croissante et majorée par $\max(\sqrt{p}, \alpha)$ donc elle est converge.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ On a donc : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(\ell)$ car f est continue donc

$\dfrac{\ell^2 + p}{2\,\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 + p = 2\,\ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 = p \Leftrightarrow \ell = \sqrt{p}$ car $\ell \geq 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty}$ un$= \sqrt{p}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p}{U_n} = \dfrac{p}{\sqrt{p}} = \sqrt{p}$