$\boxed{1}$ La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2\,U_n + 1}$

1° Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.

2° On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$. Démontrer que la suite V est arithmétique . En déduire l' expression de U_n en fonction de n

3° Quelle est la limite de la suite V quand n tends vers $+\infty$?

Quelle est celle de la suite U quand n tends vers $+\infty$

$\boxed{2}$ On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0=1$ et pour tout n de N : $3\,U_{n+1} - U_n = 3\,n + 2$.

1° La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?

2° On définit la suite V_n par $V_n = 4\,U_n - 6\,n + 5$.

a) Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) En déduire que pour tout n de N on a : $U_n = \dfrac{9}{4}\times\dfrac{1}{3^n} - \dfrac{3}{2}\,n + \dfrac{5}{4}$.

3° Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$

$\boxed{3}$ Soit U et V les suites définies par : $U_0 = 1$, et$V_0 = 11$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$U_{n+1} = \dfrac{4U_n + V_n}{5}$ et $V_{n+1} = \dfrac{2\,U_n + 3\,V_n}{5}$

1°) On définie la suite W par : pour tout n de $\mathbb{N}$ $W_n = V_n - U_n$.

a) Démontrer que la suite W est géométrique.

b) Exprimer W_n en fonction de n. En déduire le signe de W_n.

2°) a) Démontrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante

b) Démontrer que la suite U est majorée et que la suite V est minorée

3°) On définit la suite t par : pour tout n de N, $t_n = 2\,U_n + V_n$. Démontrer que la suite t est constante

4°) a) A l'aide de ce qui précède, exprimer U_n et V_n en fonction de n. (On pourra exprimer d'abord U_n et V_n en fonction de W_n et t_n)

b) Calculer alors les limites des suites U et V.

$\boxed{4}$ Soit I l'intervalle [0 ; 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3\,x + 2}{x + 4}$.

1° Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, f(x) appartient à I.

2° On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{3\,U_n + 2}{U_n + 4}$

Montrer que, pour tout n, U_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (U_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode :

3° a) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b) En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives U_0 , U_1 , U_2 et U_3 .

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c) Etablir la relation $U_{n+1} = \dfrac{(1 - U_n)\,(U_n + 2)}{U_n + 4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d) Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

e) Prouver que la limite l de la suite (U_n) vérifie l = f(l) et calculer l.

Deuxième méthode :

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

4° a) Prouver que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b) Calculer V_0 et exprimer V_n en fonction de n.

c) Exprimer U_n en fonction de V_n, puis en fonction de n.

d) En déduire la convergence de la suite (U_n) et sa limite l.