1 Soit la suite (U_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $U_{n+1} = 2\,U_n + 1$ et $U_0 = 0$

1° calculer les cinq premier termes de cette suite.
2° Peut-on émettre une hypothèse concernant l'expression de U_n en fonction de n ?
3° Démontrer que pour tout entier n : $U_n = 2^n - 1$.

2 Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $2^n \geq n + 1$

3 Soit x un réel différent de 1.

Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

4 Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n : $S_n = \sum_{i=0}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Soit C_n la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n : $C_n = \sum_{i=0}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

1° Calculer S_n et C_n lorsque n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 Que peut-on conjecturer ?
2° Démontrer par récurrence que pour tout n > 1 : $C_n = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$. Conclure.

5 On considère les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout entier $n \geq 1$ par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}}$

1° a) Calculer à la main les valeurs exactes de U_1 , U_2 , U_3 et U_4 .
b) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée de U_{13} à 10^{-10} près.
2° Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
3° Quelle est la formule explicite de V_n en fonction de n ?
4° a) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq 1 + V_n$

b) Prouver que pour tout entier $n \geq 3$, $\dfrac{5}{2} < U_n < 3$.

6 Considérons la suite (U_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $U_{n+2} = 5\,U_{n+1} - 6\,U_n$, $U_0 = 1$ et $U_1 = 2$
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 2^n$

7 On considère la proposition P(n) : $2^n \geq n^2$.

1° Cette proposition est-elle vraie pour les entiers 0, 1, 2, 3, 4 , 5 ?
2° Démontrer que la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel n différent de 3

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 10 \\ \text{pour tout entier naturel n, } U_{n+1} = \sqrt{2\,U_n + 1} \end{cases}$ La suite (U_n) est-elle monotone ?