$\boxed{1}$ On considère une suite (U_n) positive et la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n}{1 + U_n}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1° Pour tout n, $0 \le V_n \le 1$.

2° Si la suite (U_n) est convergente, alors la suite (V_n) est convergente.

3° Si la suite (U_n) est croissante, alors la suite (V_n) est croissante.

4° Si la suite (V_n) est convergente, alors la suite (U_n) est convergente.

$\boxed{2}$ *Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions sont indépendantes.*

Pour chaque question il y a deux conclusions correctes. Le candidat doit cocher au plus deux cases (celles qu'il juge correctes). Aucune justification n'est demandée.

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Chaque réponse exacte rapporte la moitié des points affectés ; chaque réponse fausse enlève le quart des points affectés. Cocher trois cases ou plus à une question, ou n'en cocher aucune, rapporte zéro point à cette question.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

On considère trois suites (U_n), (V_n) et (W_n) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $U_n \le V_n \le W_n$ ».

1° Si la suite (V_n) tend vers $-\infty$, alors : □ La suite (W_n) tend vers $-\infty$ □ la suite (U_n) est majorée □ la suite (U_n) tend vers $-\infty$ □ la suite (W_n) n'a pas de limite.	2° Si $U_n > 1$, $w_n = 2\,U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = \ell$, alors : □ $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n) = \ell$ □ La suite (W_n) tend vers $+\infty$ □ $\lim\limits_{n \to +\infty} (W_n - U_n) = \ell$ □ On ne sait pas dire si la suite (V_n) a une limite ou non.
3° Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = -2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (W_n) = 2$, alors : □ La suite (V_n) est majorée □ $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n) = 0$ □ la suite (V_n) n'a pas de limite □ On ne sait pas dire si la suite (V_n) a une limite ou non.	4° Si $U_n = \dfrac{2\,n^2 - 1}{n^2}$ et $W_n = \dfrac{2\,n^2 + 3}{n^2}$ alors : □ $\lim\limits_{n \to +\infty} (W_n) = 0$ □ $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n) = 2$ □ $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = 2$ □ la suite (V_n) n'a pas de limite

---

$\boxed{3}$ Quelques résultats théoriques

Démontrer que :

1° Toute suite convergente est bornée.

2° Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

3° Si une suite converge, alors sa limite est unique.

4° Si (U_n) est bornée et (V_n) converge vers 0 alors $(U_n V_n)$ converge vers 0.

5° Toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire et a pour limite un entier relatif.

6° Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée.

$\boxed{4}$ Moyenne **arithmético-géométrique** Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par : $\begin{cases} a_0 = a \text{ et } b_0 = b \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et } b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \end{cases}$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

$\boxed{5}$ Soit (U_n) une suite. On considère les propriétés suivantes :

- P1 la suite (U_n) est majorée ;
- P2 la suite (U_n) n'est pas majorée ;
- P3 la suite (U_n) converge;
- P4 la suite (U_n) tend vers $+\infty$;
- P5 la suite (U_n) est croissante.

1° Donner la traduction mathématique de la propriété P1.

2° Si les propriétés P1 et P5 sont vraies, que peut-on en conclure pour $(U_n$

3° Si les propriétés P2 et P5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (U_n)

4° Une suite vérifiant la propriété P4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P2

$\boxed{1}$ **On considère une suite (U_n) positive et la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n}{1+U_n}$.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1° Pour tout n, $0 \le V_n \le 1$. **Vrai** : Pour tout entier naturel n ,$0 < U_n < 1 + U_n$ donc $0 < \dfrac{U_n}{1+U_n} < \dfrac{1+U_n}{1+U_n}$.

2° Si la suite (U_n) est convergente, alors la suite (V_n) est convergente. **Vrai** : Pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \neq -1$. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+U_n = 1+\ell \neq 0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{\ell}{1+\ell}$

3° Si la suite (U_n) est croissante, alors la suite (V_n) est croissante. **Vrai** $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_{n+1}}{1+U_{n+1}} - \dfrac{U_n}{1+U_n} = \dfrac{U_{n+1}-U_n}{(1+U_{n+1})(1+U_n)}$

Pour tout entier naturel n, $U_n \ge 0$ donc $1 + U_{n+1} > 0$ et $1 + U_n > 0$.
(U_n) est croissante donc pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n \ge 0$.
On a donc bien $V_{n+1} - V_n \ge 0$. La suite (V_n) est croissante.

4° Si la suite (V_n) est convergente, alors la suite (U_n) est convergente. **Faux** : Contre-exemple : Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = n$. La suite (V_n) est alors définie par $V_n = \dfrac{n}{n+1}$ elle est convergente et pourtant la suite (U_n) ne l'est pas.

$\boxed{2}$ **On considère trois suites (U_n), (V_n) et (W_n) qui vérifient la propriété suivante**

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $U_n \le V_n \le W_n$ ».

1° Si la suite (V_n) tend vers $-\infty$, alors :

□ **La suite (W_n) tend vers $-\infty$** Contre exemple : $W_n = n$, $V_n = -n$ et $U_n = -n-1$.
On a bien pour tout entier naturel n, $U_n \le V_n \le W_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$. Pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n \neq -\infty$.

■ **la suite (U_n) est majorée** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ donc il existe n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur à n_0, $V_n < 1$.
Pour tout entier naturel n , $U_n \le V_n < 1$ donc la suite (U_n) est majorée à partir d'un certain rang n_0, elle est donc majorée par $\sup\{U_0 , U_1 \dots U_{n_0} , 1\}$

■ **la suite (U_n) tend vers $-\infty$** C'est un théorème de comparaison de limites.

□ **la suite (W_n) n'a pas de limite.** Contre-exemple. $U_n = -n-1$, $V_n = -n$ et $W_n = 1$
On a bien pour tout entier naturel n, $U_n \le V_n \le W_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$. pour tant (W_n) a une limite.

2° Si $U_n > 1$, $w_n = 2\,U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = \ell$, alors :

□ **$\lim (V_n) = \ell$** Contre-exemple : $U_n = 1$, $V_n = 1{,}5 + \dfrac{1}{n+2}$, $W_n = 2$.

On a bien $U_n \le V_n \le W_n$, $W_n = 2\,U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell = 1$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1{,}5 \neq \ell$

□ **La suite (W_n) tend vers $+\infty$** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 2\,\ell \neq +\infty$.

■ **$\lim (W_n - U_n) = \ell$** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 2\,\ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (W_n - U_n) = 2\,\ell - 1 = \ell$

■**On ne sait pas dire si la suite (V_n) a une limite ou non.**

3° Si $\lim (U_n) = -2$ et $\lim (W_n) = 2$, alors :

■ **La suite (V_n) est majorée** Si la suite (W_n) converge alors elle est majorée et la suite (U_n) l'est aussi.

□ **$\lim (V_n) = 0$** Contre-exemple : $U_n = -2 + \dfrac{1}{n+1}$, $V_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ et $W_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

On a bien pour tout entier naturel n $U_n \le V_n \le W_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 2$ pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1 \neq 0$.

□ **la suite (V_n) n'a pas de limite** Voir le contre-exemple précédent.

■ **On ne sait pas dire si la suite (V_n) a une limite ou non.**

4° Si $U_n = \dfrac{2\,n^2 - 1}{n^2}$ et $W_n = \dfrac{2\,n^2 + 3}{n^2}$ alors :

□ **$\lim\limits_{n\to+\infty} (W_n) = 0$** $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,n^2}{n^2} = 2 \neq 0$.

■ **$\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n) = 2$** D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n$ et $U_n \le V_n \le W_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

■ **$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = 2$** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\,n^2}{n^2} = 2$

□ **la suite (V_n) n'a pas de limite** Contre-exemple $V_n = 2$. On a bien pour tout entier naturel n $U_n \le V_n \le W_n$ et pourtant (V_n) a une limite .

$\boxed{3}$ **1° Toute suite convergente est bornée.**

Soit ℓ la limite de la suite (U_n) et I l'intervalle $]\,\ell - 1, \ell + 1\,[$. I est bien un intervalle ouvert centré en ℓ.
Comme (U_n) converge, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite (U_n) sont dans I.
Autrement dit : $n \geq N \Rightarrow \ell - 1 < U_n < \ell + 1$

- Si $N = 0$, alors (U_n) est bornée par les réels $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
- Si $N \geq 1$, alors notons A l'ensemble $\{U_0, \dots, U_{N-1}, \ell - 1, \ell + 1\}$, M le plus grand élément de A et m son plus petit élément. Ainsi (U_n) est bornée par les réels m et M.

2° Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$

- (U_n) n'est pas majorée, il existe donc un rang N pour lequel : $U_N > A$

Comme (U_n) est croissante, pour tout $n \geq N$, on a: $U_n \geq U_N > A$
Donc tout les termes de la suite sont dans l'intervalle $]\,A, +\infty\,[$ à partir du rang N.
Comme ceci est valable pour tout $A \in \mathbb{R}_+$ on en déduit bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

3° Si une suite converge, alors sa limite est unique. On suppose que la suite (U_n) admette deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < \ell_2$ et on note $d = \ell_1 - \ell_2$.
Comme (U_n) converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang N_1, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{d}{3}$.
De même, comme (U_n) converge vers ℓ_2 , à partir d'un certain rang N_2, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\frac{d}{3}$.
Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, tous les termes de la suite sont simultanément dans I_1 et I_2. Or ces deux intervalles sont disjoints . Il est donc impossible que (U_n) admette deux limites distincts. (raisonnement par l'absurde)

4° Si (U_n) est bornée et (V_n) converge vers 0 alors $(U_n V_n)$ converge vers 0.
Comme (U_n) est bornée, il existe un réel M positif tel que pour tout n : $|U_n| \leq M$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, Comme (V_n) est converge vers 0, on aura à partir d'un certain rang N : $|V_n| < \frac{\varepsilon}{M}$
On a alors : $|U_n V_n| = |U_n|\,|V_n| < M\frac{\varepsilon}{M}$ D'où $|U_n V_n| < \varepsilon$
Ce qui prouve bien que la suite $(U_n V_n)$ converge vers 0.

5° Toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire et a pour limite un entier relatif.
Soit (U_n) une suite d'entiers relatifs convergeant vers un certain réel ℓ.
Il existe donc un rang N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $|U_n - \ell| < 0{,}1$. On a alors $\ell \in\ ]\,\ell - 0{,}1\ , \ell + 0{,}1\,[$
L'intervalle $]\,\ell - 0{,}1\ , \ell + 0{,}1\,[$ est de longueur 0,2 il contient donc au plus un entier c et comme l'entier U_n est aussi dans cet intervalle, on a : un = c
La suite (U_n) est donc stationnaire (ou constante à partir d'un certain rang) et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = c \in \mathbb{Z}$

6° Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée. Soit $A \in \mathbb{R}_+$
(U_n) diverge vers $+\infty$, il existe donc un rang N tel que : $n \geq N \Rightarrow U_n \geq A$

- Si $N = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq A$ et donc la suite (U_n) est minorée par A.
- Si $N \geq 1$ on note m le plus petit élément de l'ensemble $\{U_0\ ; \dots ; U_{N-1}\ ; A\}$, ainsi, pour tout entier n :$U_n \geq m$ et donc (U_n) est minorée.

$\boxed{4}$ Moyenne arithmético-géométrique **Soient a et b deux réels tels que a > b > 0.**

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par : $\begin{cases} a_0 = a \text{ et } b_0 = b \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et } b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} \end{cases}$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

- On démontre, par récurrence, que les suites (a_n) et (b_n) sont positives.

$\mathscr{P}(0)$ $a_0 = a > 0$ et $b_0 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vrai alors $a_n > 0$ et $b_n > 0$ donc $\dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n} > 0$. $\mathscr{P}(n + 1)$ est donc vérifié.

$\mathscr{P}(n)$ est donc vérifié pour tout entier n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n\, b_n} = \dfrac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n\, b_n}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} \geq 0$.
- Pour tout entier n on a : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leq 0$. La suite (a_n) est donc décroissante.
- Pour tout entier n on a : $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n\, b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) \geq 0$. la suite (b_n) est donc croissante.
- Pour tout entier n on a : $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) \times \dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2} = (a_n - b_n) \times \dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)}$

On démontre que : $\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} \leq \dfrac{1}{2}$

$0 \leq \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leq \sqrt{a_n}$ et $0 < \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} \geq \sqrt{a_n}$ donc $\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} \leq \dfrac{\sqrt{a_n}}{2\sqrt{a_n}}$ donc $\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} \leq \dfrac{1}{2}$

Variante : $\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a_n} - 2\sqrt{b_n} \leq 2\sqrt{a_n} + 2\sqrt{b_n} \Leftrightarrow 0 \leq 4\sqrt{b_n}$ ce qui est vrai.

On sait que pour tout entier n $4\sqrt{b_n} \geq 0$ donc pour tout entier n on a bien $\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} \leq \dfrac{1}{2}$

On a donc $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2}$.

On démontre, par récurrence, que pour tout entier n : $a_n - b_n \leq \dfrac{a - b}{2^n}$

$\mathscr{P}(0)$: $a_0 - b_0 = a - b \leq \dfrac{a - b}{2^0}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifié.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vrai alors $a_n - b_n \leq \dfrac{a - b}{2^n}$. on a vu que $a_{n+1} - b_{n+1} \leq \dfrac{a_n - b_n}{2} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{a - b}{2^n} \leq \dfrac{a - b}{2^{n+1}}$

$\mathscr{P}(n)$ est donc vérifié pour tout entier n.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a - b}{2^n} = 0$ et $0 \leq a_n - b_n \leq \dfrac{a - b}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.